



Samenvatting Tentamenstof

Statistiek 1 - Vakgedeelte

Naam: Thomas Sluyter
Nummer: 1018808
Jaar / Klas: 1e jaar "Docent Wiskunde", deeltijd
Datum: 14 oktober, 2007

Voorwoord

Het eerstejaars vak "Statistiek 1" bestaat uit twee afzonderlijk getoetste onderdelen. Het vakdidactisch gedeelte wordt getoetst aan de hand van een aantal dossieropdrachten. Het wiskunde gedeelte wordt getoetst aan de hand van een tentamen.

Dit document is een samenvatting van de tentamenstof voor het vak "Statistiek 1 – Vakgedeelte". Zij beslaat de volgende hoofdstukken.

- Boek A1-3, Statistiek 1: statistische verwerking
- Boek B1-1, Statistiek 1: telproblemen
- Boek B1-3, Statistiek 2: rekenen met kansen

Andere samenvattingen en dossier-opdrachten van mijn hand zijn beschikbaar op mijn Sharepoint site:
<https://www.sharepoint.hu.nl/personal/1018808>

Versie geschiedenis

Rev.	Datum	Door	Aanpassingen
01	11/10/2007	T. Sluyter	Eerste versie
01	Nvt	Nvt	Review
02			
02			Review

Inhoudsopgave

BOEK A1-3 - STATISTIEK 1 – STATISTISCHE VERWERKING **5**

1.0 Centrummaten	5
Definities	5
Steel-blad diagram	5
Mediaan	5
Modus	5
Boxplot	6
Boxplot maken met de TI-83	6
Centrummaten et al met de TI-83	6
1.1 Frequenties	7
Definities	7
Frequentiepolygoon	7
Frequentiepolygoon maken met TI-83	7
Relatieve frequenties met de TI-83	7
Gebruik van de TI-83	7
1.2 Klassenindeling	8
Definities	8
Klasse notatie	8
Rekenen en tekenen met klassen	8
Histogram maken met de TI-83	8
1.3 Cumulatieve frequentie	9
Definities	9
Rekenen en tekenen met somfrequenties	9
Somfrequentiepolygoon maken met TI-83	9
1.4 Data in beeld	9
1.5 Spreiding	9
Definities	9
1.6 Standaardafwijking	10
Definities	10
Notatie	10
Formule	10
1.7 Verwerken en toepassen	10

BOEK B1-1 - STATISTIEK 1 – TELPROBLEMEN **11**

1.1 Tabellen en diagrammen	11
Definities	11
1.2 Machtsbomen en faculteitsbomen	12
Definities	12
Machtsboom	12
Faculteitsboom	12
1.3 Permutaties en combinaties	13
Definities	13
Permutaties	13
Combinaties	13
Combinaties en permutaties met de TI-83	13

1.4 Tellen met een rooster	14
Definities	14
Roosterdiagrammen	14
Roosters combineren	14
1.5 Kies het goede telmodel	15
1.6 Verwerken en toepassen	15
BOEK B1-1 - STATISTIEK 2 – REKENEN MET KANSEN	16
2.1 Kansen	16
Definities	16
2.2 Kansen berekenen	16
Definities	16
Rekenen met kansen en complementen	16
2.3 & 2.4 Kansen vermenigvuldigen en optellen	17
Definities	17
Het gebruik van een kansdiagram	17
2.5 Met en zonder terugleggen	18
Definities	18
2.6 Voorwaardelijke kansen	18
Definities	18
2.7 Verwerken en toepassen	18
AFBEELDINGEN EN FIGUREN	19
BRONNEN	19

Boek A1-3 - Statistiek 1 – Statistische verwerking

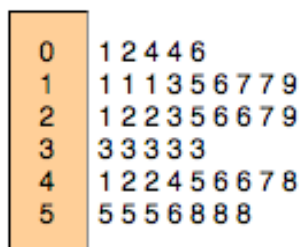
1.0 Centrummaten

Definities

Waarneming	Datgene dat wordt gemeten.
Waarnemingsgetal	Waarde van één specifieke meting.
Data	Verzamelde waarnemingsgetallen.
Centrummaten	Getallen die statistische gegevens samenvatten.
Steel-blad diagram	Methode voor het sorteren van data.
Gemiddelde	Som van alle waarnemingen, gedeeld door het aantal waarnemingen.
$\bar{\alpha}$	Notatie voor het gemiddelde van α .
Mediaan	Middelste waarnemingsgetal als alle data naar grootte zijn gerangschikt.
Modus	Het waarnemingsgetal dat het meeste voorkomt.
1 ^e kwartiel	(syn. Q1)
3 ^e kwartiel	(syn. Q3)
Boxplot	Grafische representatie van verdelingen binnen de waarnemingen en data.

Steel-blad diagram

- Methode voor het sorteren van data.
- Maakt het bepalen van mediaan en modus gemakkelijker.



Figuur 1: Steel-blad diagram

Mediaan

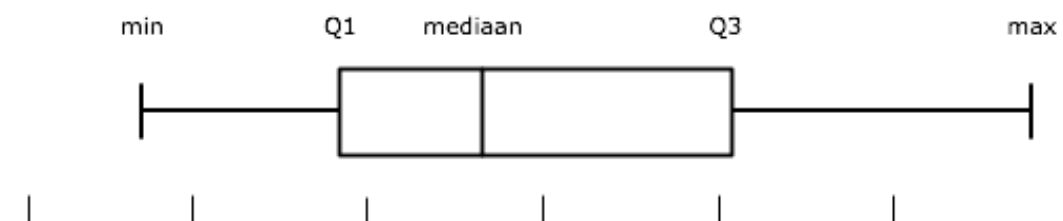
- Bij een oneven aantal waarnemingen, het middelste waarnemingsgetal.
- Bij een even aantal waarnemingen, het gemiddelde van de middelste twee waarnemingsgetallen.

Modus

- Het waarnemingsgetal dat het meeste voorkomt.
- Komen twee of meer waarnemingen even vaak voor (de frequentie is gelijk), dan is er geen modus.

Boxplot

- Een grafische presentatie van data, waarbij verdelingen tussen 25%, 50%, 75% enz in één oogopslag duidelijk worden.
- Nuttig bij grote hoeveelheden data.
- Aan beide zijden van de mediaan ligt 50% van alle waarnemingen.
- Het punt van de eerste 25% (de mediaan van de linker helft) heet ook wel Q1, het eerste kwartiel.
- Het punt van de laatste 25% (de mediaan van de rechter helft) heet ook wel Q3, het derde kwartiel.
- In de box vindt je ongeveer 50% van de data.



Figuur 2: Boxplot

Boxplot maken met de TI-83

- Kies **STAT** -> **1. Edit**.
- Gebruik L1 voor de waarnemingsgetallen en L2 voor de frequenties.
- Kies **STAT PLOT**. Kies een nieuwe of bestaande grafiek. Staat een grafiek op "On", dan zal zij ook worden geplott.
- Kies de volgende waarden:
On, Type 5 (boxplot), Xlist L1, Freq L2.
- Kies **GRAPH**.

Centrummaten et al met de TI-83

Vul eerst alle gegevens in via **STAT** -> **1. Edit**. Zodra je klaar bent doe je **STAT** -> **CALC** -> **1. 1-Var Stats**. Op je scherm verschijnt nu **1-Var Stats**. Type daar nog achteraan "L1" (2nd 1) en druk op enter. De rekenmachine rekent nu al heel wat interessants uit :)

Onder andere het gemiddelde, de modus, de mediaan. Maar ook de kwartielen, de minima, maxima en de standaarddeviatie.

Gaat het om twee lijsten, eentje met waarden en eentje met frequenties, dan moet je het commando aanpassen. Het wordt dan **1-Var Stats L1,L2**. Gebruik daar de echte komma toets van de TI-83 voor.

1.1 Frequenties

Definities

Frequentie	Geeft aan hoe vaak een waarneming voorkomt.
Absoluut	In werkelijke aantallen.
Relatief	In procenten ten opzichte van het geheel.
Verdeling	Weergave van data in tabel of grafiek.
Frequentiepolygoon	(syn. lijndiagram)

Frequentiepolygoon

- Verticale as toont de (relatieve) frequentie.
- Horizontale as toont de waarnemingsgetallen.
- Punten zijn verbonden met rechte lijnstukken.

Frequentiepolygoon maken met TI-83

- Kies **STAT** -> **1. Edit**.
- Gebruik L1 voor de waarnemingsgetallen en L2 voor de frequenties.
- Kies **STAT PLOT**. Kies een nieuwe of bestaande grafiek. Staat een grafiek op "On", dan zal zij ook worden geplot.
- Kies de volgende waarden:
On, Type 2 (lijngrafiek), Xlist L1, Freq L2, Mark +.
- Kies **WINDOW**. Stel Xmin, Xmax, Ymin en Ymax in, zodat je grafiek past.
- Kies **GRAPH**.

Relatieve frequenties met de TI-83

- Kies **STAT** -> **Edit**.
- Gebruik L1 voor de waarnemingsgetallen en L2 voor de frequenties.
- Ga bovenaan L3 staan, type: $L3 = (L2/\text{sum}(L2))*100$

De functie "sum" vindt je onder **LIST** -> **MATH** -> **5. Sum**.

Gebruik van de TI-83

Wanneer je met de TI-83 een grafiek hebt geplot kan je er op meerdere manieren doorheen lopen. De **TRACE** knop forceert de cursor de ingevoerde meetwaarden te volgen. De **GRAPH** knop laat de cursor vrij om heen en weer te bewegen.

Een snelle manier om een ingevulde lijst te wissen is om in de **STAT** view, bovenaan de lijst te gaan staan. Druk op **CLEAR**, gevolgd door **ENTER**. Dat is een stuk makkelijker dan via het **STAT** -> **clearList** menu.

Als je de **WINDOW** instellingen automatisch wilt laten maken, dan kan dat ook. Kies in plaats van **WINDOW** de optie **zoom**. Kies in dat menu de functie **0. ZoomFit**.

1.2 Klassenindeling

Definities

Klasse	Een logische groepering van een aantal meetwaarden. Nuttig bij grote hoeveelheden data.
Klassenbreedte	De afstand tussen de twee grenzen van een klasse.
Klassenmidden	Het midden tussen de twee grenzen van de klasse.
Modale klasse	De klasse waarin de modus voorkomt.

Klasse notatie

- Men gebruikt de intervalnotatie, $[x; y]$
- $[]$ betekent dat de grens nog net in de klasse valt.
- $< >$ betekent dat de grens net buiten de klasse valt.

De keuze voor de juiste haken is soms lastig. In de meeste gevallen komt het neer op afronden en welke waardes je al dan niet naar boven of onder afrondt.

Rekenen en tekenen met klassen

- Bij het tekenen van een frequentiepolygoon gebruik je de klassenmiddens als "stappen". De frequenties zet je boven het klassenmidden.
- Klassenmiddens gebruik je ook in het geval dat je het gemiddelde van de waarnemingsgetallen gaat schatten.

Histogram maken met de TI-83

- Kies **STAT** -> **1. Edit**.
- Gebruik L1 voor de waarnemingsgetallen.
- Kies **STAT PLOT**. Kies een nieuwe of bestaande grafiek. Staat een grafiek op "On", dan zal zij ook worden geplot.
- Kies de volgende waardes:
On, Type 3 (histogram), Xlist L1, Freq 1.
- Kies **WINDOW**. Stel Xmin, Xmax, Ymin en Ymax in, zodat je grafiek past.

Als bij het intypen in plaats van een "1" een "Y" verschijnt, druk dan een keertje op de **ALPHA** knop.

1.3 Cumulatieve frequentie

Definities

Somfrequentie	(syn. Cumulatieve frequentie) De som van alle frequenties vanaf het kleinste waarnemingsgetal.
Somfrequentie polygoon	Een grafische weergave van de somfrequentie. Drukt de frequentie uit in steilheid van de lijn.

Rekenen en tekenen met somfrequenties

- Voor het tekenen van een somfrequentie polygoon gebruik je de rechter klassengrens.
- De polygoon teken je door eerst een tabel te maken, en dan de somfrequenties uit te zetten boven de -rechter- klassengrens.

Somfrequentiepolygoon maken met TI-83

- Kies **STAT** -> **1. Edit**.
- Gebruik L1 voor de waarnemingsgetallen en L2 voor de frequenties.
- Ga bovenaan L3 staan, type: **L3 = CumSum(L2)**
- Kies **STAT PLOT**. Kies een nieuwe of bestaande grafiek. Staat een grafiek op "On", dan zal zij ook worden geplotted.
- Kies de volgende waarden:
On, Type 2 (lijngrafiek), Xlist L1, Freq L3, Mark +.
- Kies **WINDOW**. Stel Xmin, Xmax, Ymin en Ymax in, zodat je grafiek past.
- Kies **GRAPH**.

De functie "CumSum" vindt je onder **LIST** -> **OPS** -> **6. CumSum**.

1.4 Data in beeld

Geen notities of aantekeningen.

1.5 Spreiding

Definities

Spreidingsmaten	Geven aan hoe ver de data in een verdeling uit elkaar liggen.
Spreidingsbreedte	Verschil tussen het grootste en het kleinste waarnemingsgetal.
Kwartielafstand	Spreidingsmaat bij de mediaan. $Q3 - Q1$.

1.6 Standaardafwijking

Definities

Standaardafwijking (syn. Standaarddeviatie) De gemiddelde afstand tot het gemiddelde

Notatie

- De korte notatie voor standaarddeviatie is SD.
- Standaarddeviatie wordt ook wel aangegeven met de sigma σ .

Formule

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\chi_i - \bar{\chi})^2}{n}}$$

Figuur 3: Formule standaarddeviatie

Hier staat letterlijk: Neem voor elke meetwaarde de afstand tot het gemiddelde. Tel deze bij elkaar op en deel ze door het aantal meetwaarden. De kwadraat en wortel zijn nodig om ook de negatieve afstanden correct mee te tellen.

Deze formule is in LaTeX te schrijven als:

```
\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\chi_i - \bar{\chi})^2}{n}}
```

1.7 Verwerken en toepassen

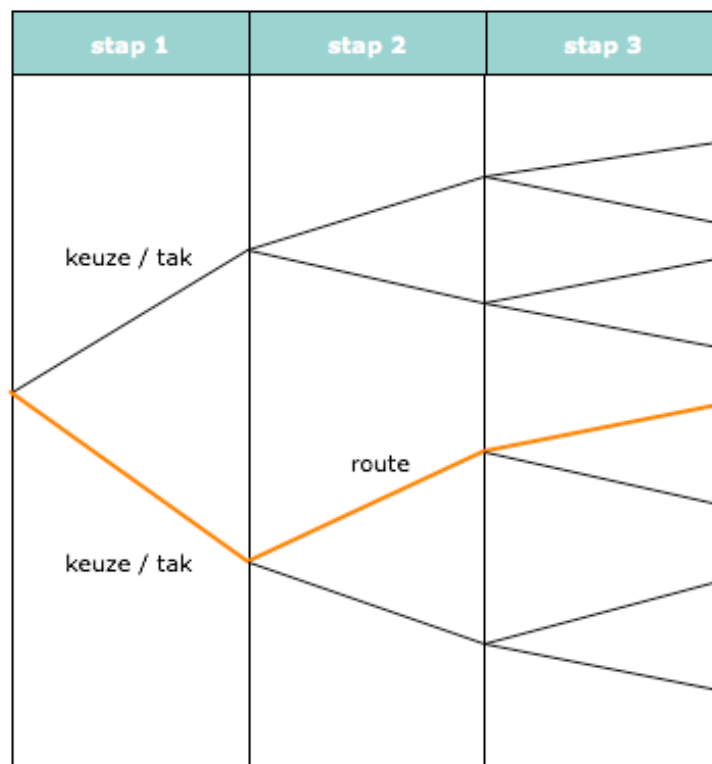
Geen notities of aantekeningen.

Boek B1-1 - Statistiek 1 – Telproblemen

1.1 Tabellen en diagrammen

Definities

Boomdiagram	Hulpmiddel om systematisch te tellen
Stappen	Voor elke keuze die je maakt teken je een stap in het boomdiagram.
Takken	Voor elke keuzemogelijkheid die je hebt teken je een tak in het boomdiagram.
Keuze	Eén van de mogelijkheden die je per stap kan kiezen.
Route	Het pad naar één specifieke keuze, via de tussenliggende stappen en takken.
Volgorde	(syn. Rangschikking) Datgene dat de route uitbeeldt.



Figuur 4: Boomdiagram

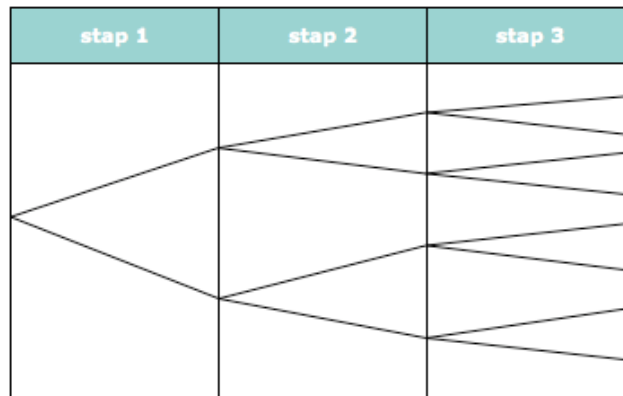
1.2 Machtsbomen en faculteitsbomen

Definities

Machtsboom	Boomdiagram waarbij het aantal takken gelijk blijft, ongeacht het aantal genomen stappen.
Faculteitsboom	Boomdiagram waarbij het aantal takken met één afneemt per genomen stap.
N Faculteit	(syn. $N!$) Vermenigvuldiging van alle gehele getallen tot N. Bijv: $1 \times 2 \times 3 = 3!$

Machtsboom

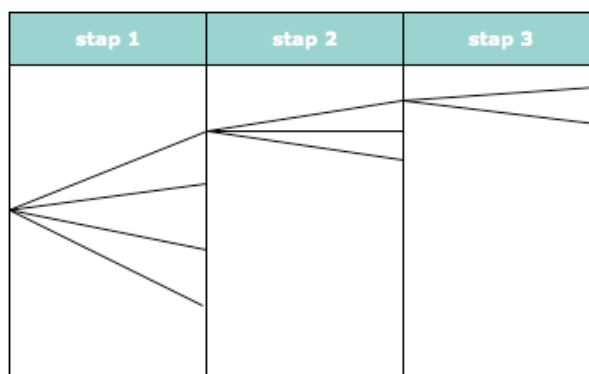
Je gebruikt een machtsboom in de gevallen waar er sprake is van terug leggen. Het aantal keuzes dat je kan maken blijft voor elke stap gelijk. Het aantal uiteindelijke, verschillende routes / mogelijkheden is uit te drukken als het aantal keuzes tot de macht van het aantal stappen.



Figuur 5: Machtsboom

Faculteitsboom

Een faculteitsboom gebruik je wanneer het aantal keuzes per stap met één afneemt. Er is in dat geval geen sprake van terug leggen. Het aantal verschillende mogelijkheden is uit te drukken als de faculteit van het eerste aantal mogelijke keuzes.



Figuur 6: Faculteitsboom

1.3 Permutaties en combinaties

Definities

Permutatie	(syn. Volgorde). Een selectie van X uit Y, waarbij de volgorde van belang is.
Combinatie	(syn. Selectie). Een selectie van X uit Y, waarbij de volgorde niet van belang is.

Permutaties

Wanneer je gaat kiezen zonder terug te leggen heb je $n!$ mogelijkheden, met n als het aantal stappen. Gebruik je echter maar r van dit aantal stappen, dan is het niet $n!$, maar $n! / r!$

$${}_n P_r = \frac{n \cdot \dots \cdot r \cdot \dots \cdot 1}{r \cdot \dots \cdot 1} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Figuur 7: Permutatie formule

In LaTeX is de notatie:

```
nPr = \frac {n \cdot \dots \cdot r \cdot \dots \cdot 1} {r \cdot \dots \cdot 1} = \frac {n!} {(n-r)!}
```

Combinaties

Nu de volgordes er niet meer toe doen en we alleen maar letten op unieke groepjes, wordt het aantal mogelijkheden kleiner. De formule voor permutaties blijft staan, echter we delen haar nog eens door r om zo terug te vallen op het aantal unieke groepjes.

De tweede notatie in de afbeelding noemt men "n boven r".

$${}_n C_r = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r! \cdot (n-r)!}$$

Figuur 8: Combinatie formule

In LaTeX is de notatie:

```
nCr = \begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix} = \frac {n!} {r! \cdot (n - r)!}
```

Combinaties en permutaties met de TI-83

De faculteit functie vindt je onder **MATH** -> **PRB** -> **4**. !.

nCr en nPr vindt je onder **MATH** -> **PRB** -> **2**. nPr en **3**. nCr .

1.4 Tellen met een rooster

Definities

Alternatieven (syn. Keuzemogelijkheid)
Roosterdiagram Een model voor telproblemen waarbij je telkens uit twee alternatieven moet kiezen.

Roosterdiagrammen

Een kortste route in een rooster bestaat uit een aantal stappen n . Daarbij worden r stappen horizontaal afgelegd en $(n-r)$ verticaal. De routes naar een bepaald eindpunt verschillen alleen in de volgorde waarin de stappen worden gezet.

Het aantal kortste routes is dus gelijk aan het aantal verschillende rijtjes van n stappen waarbij je r keer een stap naar rechts doet. Dit aantal is gelijk aan n boven r .

	1	4	10	20
	1	3	6	B 10
	1	2	3	4
	0	1	1	1
A				

Figuur 9: Roosterdiagram / telrooster

In het bovenstaande voorbeeld is $n=6$ en $r=3$. Daar uit volgt dat het aantal kortste routes van A naar B gelijk is aan $6C_3$, of 6 boven 3.

Roosters combineren

Wil je het aantal kortste route door twee roosters bepalen, dan bereken je eerst de afzonderlijke paden. Daarna vermenigvuldig je de berekende aantallen met elkaar om tot het totaal aantal paden te komen.

1.5 Kies het goede telmodel

Hoe maak je jou keuze voor de te gebruiken aanpak

- Is er bij elke stap die je neemt een keuze minder over? Gebruik een faculteitsboom.
- Blijft het aantal keuzes die je kan nemen per stap gelijk? Gebruik een machtsboom.
- Kan je bij elke stap steeds kiezen uit de zelfde twee mogelijkheden? Gebruik een rooster.
- Heb je twee bronnen van informatie die je tegen elkaar uit wilt zetten? Gebruik een tabel.

Als je hebt gekozen, teken dan (een deel van) het diagram.

Tel het aantal mogelijkheden.

- Faculteitsboom → permutaties
- Machtsboom → machten
- Rooster → combinaties

In veel gevallen zal je echter verschillende methoden met elkaar moeten combineren om tot het juiste antwoord te komen.

1.6 Verwerken en toepassen

Geen notities of aantekeningen.

Boek B1-1 - Statistiek 2 – Rekenen met kansen

2.1 Kansen

Definities

Toevalsexperiment	Experiment waarbij de uitkomst niet vast staat.
Gebeurtenis	Een of meerdere uitkomsten.
$P(A)$	De kans op gebeurtenis A.
Theoretische kans	Een beredeneerde of berekende kans $P(A)$.
Experimentele kans	Een empirisch vastgestelde kans $P(A)$, op basis van de relatieve frequentie dat A zich voor doet.
Toevalsgetallen	(syn. Random getallen) Willekeurige getallen.
Simuleren	Nabootsing van een toevalsexperiment.

2.2 Kansen berekenen

Definities

Complementair	Wanneer twee uitkomsten alle uitkomsten bevatten, maar geen uitkomsten gemeenschappelijk hebben.
Complement	(syn. $!A$) Alle uitkomsten die niet A zijn.
Complementregel	De kansen van beide complementen samen zijn 1.
$P(!A)$	De kans dat gebeurtenis A niet plaats vindt.
$n(A)$	Het aantal gunstige uitkomsten voor A.
N	Het totaal aantal uitkomsten.

Rekenen met kansen en complementen

$$P(A) = \frac{n(A)}{N}$$

Figuur 10: Kansberekening bij een toevalsexperiment

$$P(A) + P(!A) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(!A)$$

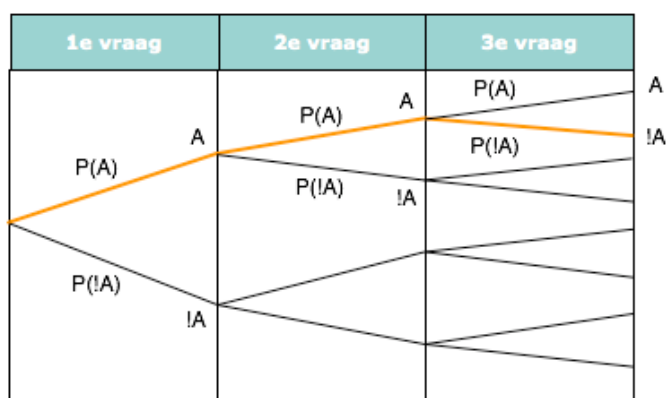
Figuur 11: De complementregel

2.3 & 2.4 Kansen vermenigvuldigen en optellen

Definities

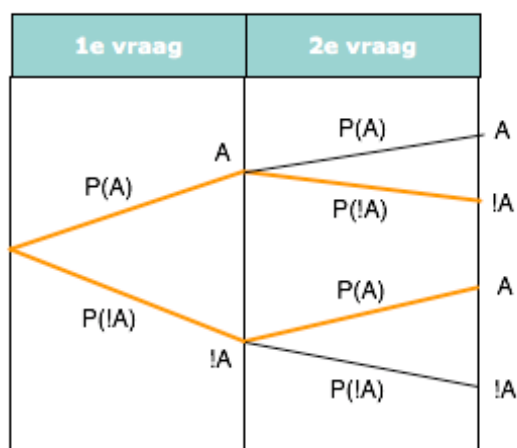
Kansdiagram Een boomdiagram met twee takken per stap. Elke tak heeft een eigen kans.

Het gebruik van een kansdiagram



Figuur 12: Kansen vermenigvuldigen

Als je op zoek bent naar de kans op één specifieke uitkomst, dan vermenigvuldig je de opeenvolgende kansen. Zo zou de kans $P(A,A,!A)$ in het bovenstaande figuur gelijk zijn aan $P(A) \cdot P(A) \cdot P(!A)$.



Figuur 13: Kansen optellen

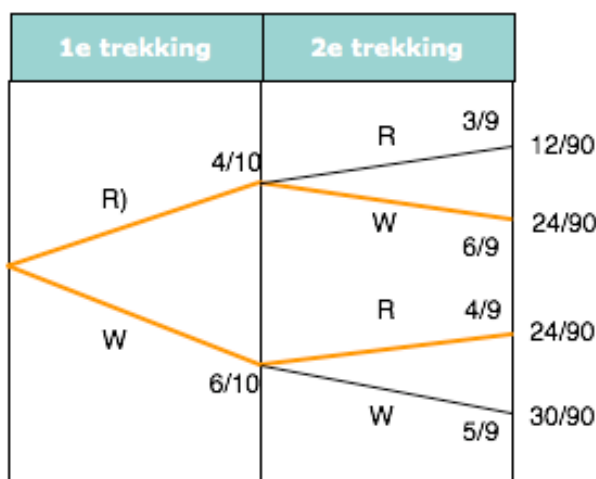
Ben je op zoek naar een combinatie in plaats van één specifieke uitkomst, dan tel je de afzonderlijke kansen bij elkaar op. Zo zou de kans $P(A,!A+A,A)$ in het bovenstaande figuur gelijk zijn aan $[P(A) \cdot P(!A)] + [P(!A) \cdot P(A)]$.

Overigens is dat, dankzij de complementregel, ook weer gelijk aan $\{ 1 - [P(A) \cdot P(A)] + [P(!A) \cdot P(!A)] \}$.

2.5 Met en zonder terugleggen

Definities

Aselecte trekking	Een blindelingse, willekeurige trekking.
Vaasmodel	Aselecte keuze uit een vaas met knikkers.
Met terug leggen	De kansen blijven bij elke trekking het zelfde.
Zonder terug leggen	De kansen veranderen bij elke trekking.



Figuur 14: Kansboom zonder terugleggen

In het bovenstaande voorbeeld beginnen we met een vaas met vier rode en zes witte knikkers. Afhankelijk van wat voor knikker we bij de eerste trekking pakken verandert de kans voor de tweede trekking.

2.6 Voorwaardelijke kansen

Definities

Voorwaardelijk $P(A B)$	Gebeurtenis A zal plaats vinden als B ook gebeurt. Notatie voorwaardelijke kans, waarbij A afhankelijk is van gebeurtenis B.
Onafhankelijk	Als twee gebeurtenissen geen invloed hebben op elkaar.
$P(A B) = P(A)$ $P(B A) = P(B)$	Gebeurtenissen A en B zijn onafhankelijk van elkaar.
Afhankelijk	Twee kansen die wel onderling zijn verbonden.

2.7 Verwerken en toepassen

Geen aantekeningen en notities.

Afbeeldingen en figuren

Figuur 1: Steel-blad diagram	5
Figuur 2: Boxplot.....	6
Figuur 3: Formule standaarddeviatie	10
Figuur 4: Boomdiagram	11
Figuur 5: Machtsboom	12
Figuur 6: Faculteitsboom.....	12
Figuur 7: Permutatie formule.....	13
Figuur 8: Combinatie formule	13
Figuur 9: Roosterdiagram / telrooster.....	14
Figuur 10: Kansberekening bij een toevalsexperiment	16
Figuur 11: De complementregel.....	16
Figuur 12: Kansen vermenigvuldigen	17
Figuur 13: Kansen optellen.....	17
Figuur 14: Kansboom zonder terugleggen.....	18

Bronnen

Moderne Wiskunde A1-3, ISBN 90-01-60297-5, 2004

Moderne Wiskunde B1-1, ISBN 90-01-60295-9, 2003