



Samenvatting “Math through the ages”

Geschiedenis 2 - Vakgedeelte



Naam: Thomas Sluyter
Nummer: 1018808
Jaar: 1e jaar “Docent Wiskunde”, deeltijd
Datum: 19 juni, 2008

Introductie

Voor het tweedejaars vak “Geschiedenis 2 – Vakgedeelte” krijgen de studenten een grote hoeveelheid leeswerk voorgeschoteld. Zij werken niet alleen met een mooi lesboek, maar ook met een dikke syllabus.

Dit document bevat een samenvatting van de behandelde hoofdstukken uit het lesboek “Math through the ages”, van W. Berlinghoff en F. Gouvêa.

Het lesboek bestaat uit een elftal hoofdstukken die zich elk focussen op een specifiek tijdvak van de ontwikkeling van de wiskunde. Daarnaast worden er vijftientig extra “schetsen” gegeven, die in gaan op een specifiek onderdeel van de wiskunde. Niet alle schetsen worden in dit document besproken.

De nummering van hoofdstukken in dit document gebeurt als volgt:

x. Titel	Een “normaal” hoofdstuk uit het lesboek.
E-x. Titel	Een extra hoofdstuk, gebaseerd op aantekeningen uit de les.
S-x. Titel	Eén van de “schets” hoofdstukken uit het lesboek.
A-x. Titel	Appendices met extra informatie.

Versie geschiedenis

Rev.	Datum	Door	Aanpassingen
1.0	13/05/2008	T. Sluyter	Hoofdst. 1 t/m 6, plus 9 schetsen.
	21/05/2008	M. Sluyter-Stek	Review
2.0	21/05/2008	T. Sluyter	Overgang naar template v1.3. Hoofdst. 7 t/m 8, 3 schetsen. Hoofdst E-1 en A-1.
	Nvt	Nvt	Review
2.1	01/06/2008	T. Sluyter	Hoofdst. 9 t/m 11, 2 schetsen.
	Nvt	Nvt	Review
2.2	19/06/2008	T. Sluyter	Index toegevoegd. Review

Inhoudsopgave

1. Beginnings	4
E-1. Antieke rekenalgoritmes	6
EGYPTE	6
MESOPOTAMIË	7
2. Greek mathematics.....	9
3. Meanwhile, in India	11
4. Arabic mathematics.....	12
5. Medieval Europe	13
6. The 15th and 16th centuries.....	14
7. Algebra comes of age	15
8. Calculus and applied mathematics	17
9. Rigor and professionalism.....	18
10. Abstraction, computers and new applications.....	20
11. Mathematics today.....	21
S-1. Keeping count, writing whole numbers	22
S-4. Broken numbers, writing fractions	24
S-7. Measuring the circle, the story of π	26
S-8. The classic art, writing algebra with symbols.....	27
S-9. Linear thinking, solving first degree equations	28
S-10. A square and things, quadratic equations	29
S-11. Intrigue in Renaissance Italy, solving cubic eq.....	31
S-12. A cheerful fact, the Pythagorean theorem	32
S-14. On beauty bare, Euclid's plane geometry	33
S-15. In perfect shape, the Platonic solids.....	34
S-16. Shapes by the number, coordinate geometry	35
S-17. Impossible, imaginary, useful complex numbers	36
S-18. Half is better, sine and cosine	37
A-1. De 2/n tabel van de Rhind papyrus.....	39
Index	41
Afbeeldingen en figuren.....	44
Bronnen.....	44

1. Beginnings

Bij aanvang van het boek worden drie kanttekeningen gemaakt:

1. Hoewel de geschiedenis van de wiskunde zeer ingewikkeld is en nog open staat voor interpretatie, gaat men in het boek uit van algemeen geaccepteerde “feiten”.
2. In het boek zullen maar weinig vrouwelijke wiskundigen aan bod komen. Dit ligt aan het feit dat de vrouwelijke bijdragen aan de wiskunde en de wetenschap in zijn geheel tot zeer recent vaak werden genegeerd of ontkend.
3. Alhoewel de laatste honderd jaar enorm veel ontwikkelingen hebben plaats gevonden in de wiskunde, laat het boek hen links liggen. Al deze ontwikkelingen vallen namelijk buiten de wiskunde van de middelbare school.

Het is niet mogelijk met zekerheid te zeggen waar en wanneer de eerste wiskundige bewerkingen plaats vonden. We kunnen wel stellen dat elke civilisatie die schrift heeft ontwikkeld ook een bepaalde vorm van rekenen heeft gekend. Op plaatsen waar een centrale overheid werd opgebouwd werd het al snel nodig om standaard maten vast te stellen en om hoeveelheden af te kunnen meten. Tot op zijn minst 5.000 BC was het schrijven en rekenen veelal nog het werk van schriftgeleerden en gouvernementele schrijvers.

Het is begrijpelijk dat ons maar weinig bewijzen uit die antieke tijden resteren. Het meeste weten we nog van de Mesopotamiërs (wiens kleitabletten goed bewaard zijn gebleven) en van de Egyptenaren, van wie we nog een aantal papyrusrollen hebben gevonden.

De basis van de Egyptische rekenkunde is als volgt te beschrijven:

- Men werkt met machten van tien. Een getal wordt weergegeven door voor elke macht een bepaald symbool een aantal malen te herhalen. Zo ziet het getal 35 er bijvoorbeeld als volgt uit: 
- Optellen en aftrekken waren hun basisberekeningen. Vermenigvuldiging en delen werden uitgevoerd met een opmerkelijk systeem van verdubbelingen.
- Breuken werden altijd weergegeven als een optelsom van meerdere “1/X” breuken. Zo had men het niet over “3/5”, maar over “1/2+1/10”.
- Ze waren in staat om lineaire vergelijkingen op te lossen.
- Zij konden de inhoud en de oppervlakte van een aantal geometrische vormen berekenen, of in ieder geval benaderen.
- Bij berekeningen maakte men veel gebruik van tabellen met standaard veelvouden en breuken.

Het rekenonderwijs vond in die tijd voornamelijk plaats met behulp van voorbeelden en het imiteren van deze sommen. Daar buiten lijkt het redelijk op het onderwijs van tegenwoordig.

Waar de Egyptenaren vooral gedreven werden door de praktische toepassing van het rekenen, lijkt het er op dat de Mesopotamiërs rekenen ook vanuit hun nieuwsgierigheid verder gingen ontwikkelen. Er zijn voorbeelden te vinden van geschriften met berekeningen die de dagelijkse toepassingen te buiten gaan. Ook hun rekenonderwijs lijkt vooral op voorbeelden te zijn gestaafd.

Een aantal karakteristieken van het Mesopotamische rekenen:

- Men gebruikte een zestigtallig stelsel, met twee tekens: één voor eenheden en één voor tientallen. Net als bij de Egyptenaren wordt een getal weergegeven door een verzameling van deze tekens. Daarnaast wordt elk van deze sets gebruikt om een macht van zestig weer te geven.
- Men maakte bij berekeningen veel gebruik van tabellen met standaard producten, breuken, benaderingen en conversies.
- Men kende zowaar kommagetallen, die (analoog aan onze decimale getallen) “sexagesimale getallen” hetten.
- Men was in staat om lineaire vergelijkingen en een groot aantal kwadratische vergelijkingen op te lossen. Het is niet ondenkbaar dat men voor de kwadratische vergelijkingen gebruik maakte van meetkundige, concrete materialen.
- Net als de Egyptenaren kon men de inhoud en het oppervlak van veel geometrische vormen benaderen. Daarnaast kende men een benadering van de stelling van Pythagoras.
- De wiskunde is vooral gedreven door ontdekte methodes. Heeft men een nieuwe rekenwijze ontdekt, dan blijft men nieuwe, interessantere sommen verzinnen voor deze methode.

Aan het einde van de “Oud Babylonische” tijd, komt er een eind aan dit enthousiasme voor rekenen. Het vak van schriftgeleerde wordt er nu één van familietradities en is niet langer een taak van de overheid. Wiskunde wordt alleen nog maar vanuit praktisch oogpunt uitgevoerd en niet meer ter vermaak.

Van de oude, Chinese rekenkunde is maar weinig bekend. Het beroemdste werk dat wij kennen is “The nine chapters on the mathematical art”, welke in 263 AD door Liu Hui zijn verzameld en geannoteerd. Deze boeken bestaan vooral uit voorbeeldsommen, alhoewel de annotaties van Liu Hui later ook het rekenkundige bewijs boden.

E-1. Antieke rekenalgoritmes

In het lesboek gaat men niet zeer diep in op de algoritmes die werden gebruikt in de oudheid. Men verteld wel over de notatie en in globale zin over hoe men rekende, maar er wordt nergens duidelijk voor gedaan hoe het een en ander werkte. Bij deze dan alsnog een uitleg, op basis van het dictaat en de in de les behandelde stof. Dit gebeurt veelal, net als in de oudheid, op basis van voorbeelden.

Egypte

Voor een overzicht van de glyfen die worden gebruikt voor de notatie van getallen verwijs ik de lezer naar hoofdstuk S-1. Omdat het Egyptische systeem non-positioneel is, is het optellen van getallen letterlijk een kwestie van de beiden getallen bij elkaar optellen. Hier onder $182 + 23 = 105$

$$\begin{array}{c} \text{III} \\ \text{II} \end{array} \begin{array}{c} \text{⤿} \\ \text{⤿} \end{array} = \begin{array}{c} \text{⤿} \\ \text{⤿} \end{array} \begin{array}{c} \text{III} \\ \text{II} \end{array} \begin{array}{c} \text{⤿⤿⤿⤿} \\ \text{⤿⤿⤿⤿} \end{array}$$

Aftreksommen werden op een vergelijkbare manier gemaakt, in zoverre dat er niet werd afgetrokken, maar aangevuld. Hier onder: $28 - 13 = 15$.

$$\begin{array}{c} \text{⤿} \\ \text{⤿} \end{array} \begin{array}{c} \text{III} \\ \text{II} \end{array} = \begin{array}{c} \text{⤿} \\ \text{⤿} \end{array} \begin{array}{c} \text{III} \\ \text{II} \end{array} \begin{array}{c} \text{⤿⤿⤿} \\ \text{⤿⤿⤿} \end{array}$$

⤿ ⤿⤿⤿	I	
⤿⤿ ⤿⤿⤿	II	
⤿⤿⤿ ⤿⤿⤿⤿	III	
⤿⤿ ⤿⤿⤿ ⤿	⤿⤿⤿	
⤿⤿ I ⤿⤿⤿⤿	⤿⤿⤿	

Voor het vermenigvuldigen van getallen gebruikte men een systeem dat we tegenwoordig ook weer terugzien in onze rekenlessen. Men rekent eerst een aantal veelvouden van het basisgetal uit, om daarna het gewenste resultaat te berekenen.

Hier naast zien we: $17 \times 13 = 221$.

De krassen door de verticale balk gebruiken we om aan te geven welke veelvouden van zeventien we nodig hebben om tot dertien te komen. In dit geval: $1 + 4 + 8 = 13$.

Voor delen werkt het overigens exact het zelfde. In het geval van $63 : 9$ berekenen we de veelvouden van het getal 9 en kiezen we de nodige veelvouden om tot 63 te komen. In dit geval is dat $1 + 2 + 4 = 7$

Het wordt spannend zodra we ook naar breuken gaan kijken. Zoals elders ook al wordt verteld kenden de Egyptenaren alleen stambreuken: breuken met een teller van 1 (en soms 2). Dit zorgt er voor dat je een redelijk lastig mengelmoesje aan breuken moet samenstellen om het getal weer te geven dat je zoekt.

Hier naast zien we bijvoorbeeld: $19 : 18 = 2 + 1/2 + 1/8$.

Verdere notatie die we herkennen is bijvoorbeeld het plaatsen van één of twee apostrofs naast een getal, wat aangeeft dat een getal wordt verdubbeld.

⤿⤿⤿	I	
⤿⤿ ⤿	II	
⤿⤿⤿	⤿⤿	
⤿⤿	⤿⤿⤿	
⤿	⤿⤿⤿⤿	
⤿⤿⤿⤿ ⤿	⤿⤿ ⤿⤿	

Nogmaals, de Egyptenaren kenden alleen stambreuken in de vorm van $1/n$. De Enige uitzondering daarop is $2/3$, wat wordt afgebeeld als drie eenheden, met een dubbele streep er boven. Alle andere vormen van $2/n$ worden vereenvoudigd met behulp van de tabel in hoofdstuk A-1.

De tabel in A-1 is overigens enigszins een mysterie. Van de meeste splitsingen weten wij hoe ze zijn ontstaan, maar de keuzes voor de breuken in kwestie zijn niet altijd even duidelijk. We weten wel dat de splitsing vaak loopt in de vorm van één van deze twee formules.

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\frac{n+1}{2}} + \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} \qquad \frac{2}{p \cdot q} = \frac{1}{p \cdot \frac{p+q}{2}} + \frac{1}{q \cdot \frac{p+q}{2}}$$

Mesopotamië

Voor het nut van onze opleiding spreken wij de volgende notatie af voor de Babylonische rekenkunde: ... $60^3 \cdot 60^2 \cdot 60^1 \cdot 60^0$, $60^{-1} \cdot 60^{-2} \cdot 60^{-3}$... De punten worden gebruikt om de verschillende posities van elkander te scheiden, terwijl de komma wordt gebruikt om de overgang naar fracties aan te geven.

Het omzetten van decimale getallen naar sexagesimale getallen gebeurt analoog aan de conversie die we kennen naar binaire, octale en hexadecimale getallen. Getal X (decimaal) is gelijk aan $(A \cdot 60^a) + (B \cdot 60^b) + (C \cdot 60^c) + \dots$, waardoor het sexagesimale getal A.B.C is.

Het optellen en aftrekken van getallen gebeurt analoog aan de wijze die wij kennen in ons decimale, positionele stelsel. Men zet beide getallen boven elkander uit en telt kolomsgewijs de getallen bij elkander op. Leengedrag en het overdragen van een groter getal naar de volgende kolom komen daar gewoon bij voor.

Voor het vermenigvuldigen gebruikte men veelal tabellen met de tafels van 1 t/m 59 . In deze tabellen werkte men de volgende waardes uit: $1 \cdot X$, $2 \cdot X$, ..., $20 \cdot X$, $30 \cdot X$, $40 \cdot X$, $50 \cdot X$. Om tot één van de tussengelegen factoren te komen neemt men twee bekende uitkomsten en telt hen bij elkander op.

In de lessen zijn we tot nu toe twee symbolen tegen gekomen van rekenkundige bewerkingen.



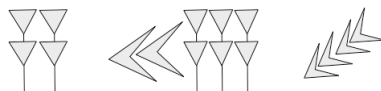
Optellen



Vermenigvuldigen

Voor het werken met breuken geldt overal dat wij met machten van 60 in de noemers willen werken. Zo zien wij bijvoorbeeld dat:

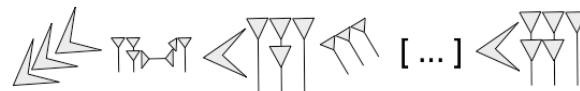
$$\begin{aligned} \frac{2}{27} &= \frac{60 \cdot \frac{2}{27}}{60} = \frac{\frac{120}{27}}{60} = \frac{\frac{40}{9}}{60} = \frac{4\frac{4}{9}}{60} = \frac{4}{60} + \frac{\frac{4}{9}}{60} = \frac{4}{60} + \frac{60 \cdot \frac{4}{9}}{60^2} \\ &= \frac{4}{60} + \frac{26}{60^2} + \frac{\frac{2}{3}}{60^2} = \frac{4}{60} + \frac{26}{60^2} + \frac{60 \cdot \frac{2}{3}}{60^3} \\ &= \frac{4}{60} + \frac{26}{60^2} + \frac{40}{60^3} \end{aligned}$$



Bij het delen van twee getallen, bijvoorbeeld N/P , gaat men uit van een vermenigvuldigingssom met de inverse van P : $N * 1/P$. Net zoals men eerder tabellen had met de tafels van vermenigvuldiging, had men voor deze sommen ook tabellen van inversen. Bijvoorbeeld:

1:2	0, 30	1:6	0, 1
1:3	0, 20	1:8	0, 7 . 30
1:4	0, 15	1:9	0, 6 . 40
1:5	0, 12	1:10	0, 6

In veel gevallen van sommen, wordt de werkelijke waarden van getallen pas duidelijk uit de context. Zoals we ook in hoofdstuk S-1 kunnen lezen hadden de Babyloniërs een positioneel systeem zonder symbool voor de nul. Door deze gebrekkige notatie kan een som alle kanten op, wanneer zij slecht is beschreven. Bijvoorbeeld:



In dit voorbeeld herkennen we het getal 30, gevolgd door een “+”, gevolgd door de getallen 14 en 3. Na een aantal woorden tekst volgt het getal 15. Na enig puzzelen kan je tot de conclusie komen dat het om de volgende som gaat: $0, 30 + 14, 30 = 15, 0$. Erg verwarrend dus, dat men notaties door elkaar gebruikt en dat de juiste posities voor elke waarden ook niet meteen in het oog springen.

2. Greek mathematics

Hebben we het over de “Griekse wiskunde”, dan bedoelen wij daar niet het land Griekenland mee, maar alle landen die tussen 600 BC en 300 AD onderdeel waren van de Griekse cultuur. Veel Griekse wiskundigen waren van een volslagen andere nationaliteit. Door de veroveringen van Alexander de Grote viel een groot deel van de landen aan de oostelijke Middellandse Zee onder de Griekse cultuur. Rond 400 BC was Alexandrië (aan de Nijl) één van de belangrijkste steden voor de Griekse wiskunde.

Het bekendste werk uit de Griekse wiskunde, is de “Elementen der geometrie” van Euclides. Van dit boek zijn geen originele kopieën bewaard gebleven; wij kennen alleen vertalingen van vertalingen.

In de oude Griekse cultuur werd wiskunde vooral bedreven door rijke zelfstandigen. Het was geen baan, de overheid bemoeide zich er niet mee en men hechte meer waarde aan logische bewijzen dan aan praktische toepassingen. Men hield zich vooral bezig met meetkunde, maar was ook bekend met gehele getallen, met verhoudingen, met astronomie en met mechanica.

Over de Griekse wiskundigen zelf zijn maar weinig feiten met zekerheid vast te stellen. Gedurende een groot deel van hun tijd zijn namelijk geen geschreven overleveringen gemaakt, en vertrouwde men vooral op de mondelinge overdracht.

Zo is het ook gegaan met Pythagoras. Een paar eeuwen nadat Pythagoras (waarschijnlijk) heeft geleefd vertelt men legenden over de man. Hij zou het hoofd van een sektarische groep geweest zijn, die er strikte idealen op na hielden. Zij zouden zich bezig hebben gehouden met religie en filosofie, maar ook met wiskunde. Later ontstonden de neo-Pythagoranen die deze legendarische idealen na gingen leven. Van hen is bekend dat zij een groot aantal wiskundige ontdekkingen hebben gedaan, die waarschijnlijk later aan Pythagoras zelf zijn toegeschreven.

Verhoudingen hebben altijd een grote rol gespeeld bij de Grieken, omdat hun meetkunde nagenoeg nooit met getallen werkte. Een lengte kon kleiner, gelijk aan of groter dan een andere lengte zijn, maar de werkelijke lengte was een triviaal feit. Een maat zouden zij niet uitdrukken in een discreet getal, maar in een beschreven “ratio” van een andere, bekende geometrische situatie.

Zo beschrijft men bijvoorbeeld de oppervlakte van een object niet met één getal, maar met een geconstrueerde rechthoek wiens oppervlak even groot is als die van het object. Dit leidde onder andere tot zeer interessante, wiskundige problemen als het bepalen van de juiste rechthoek voor de oppervlakte van een cirkel. Andere beroemde “problemen” waren het delen door drie van een gegeven hoek en het construeren van een kubus wiens volume het dubbele is van een andere.

Uit dit gebruik van ratio's zijn uiteindelijk ook de “onuitdrukbare” ratio's ontstaan. Zo ontdekte men bijvoorbeeld dat het onmogelijk is om de verhouding tussen de schuine zijde en de beide rechte zijden van een driehoek met een geheel getal uit te drukken. De ratio's tussen dit soort segmenten noemde men “irrationeel”.

Zoals gezegd hechtten de Grieken veel waarde aan het bewijzen van wiskundige stellingen. Ter ondersteuning van dit bewijs werkte men met een aantal “postulaten”, aannames die per definitie als correct worden geaccepteerd. Deze vorm van logisch beredeneren zien we later ook terug in de werken van Aristoteles.

Het beroemde werk “De elementen” van Euclides is zo enorm belangrijk, omdat zij een verzameling is van de Griekse meet- en wiskunde tot 300 BC. Euclides heeft zelf weinig originele ontdekkingen gedaan, maar heeft wel alle wiskundige stellingen in het boek voorzien van logisch bewijs. “De elementen” is tot in de twintigste eeuw nog gebruikt in het onderwijs van wiskunde, meetkunde en logica. Na “De elementen” heeft de wiskunde overigens niet stil gestaan. Men ging verder met de meetkunde van gebogen en conische vlakken.

Bij het behandelen van de sferische meetkunde (onder andere ten behoeve van astronomie) kwamen de Grieken er niet onderuit dat zij getallen moesten binden aan meetkundige maten. Voor het aangeven van de grootte van de hoek gebruikte men uiteindelijk een systeem dat was geleend van de Babyloniërs en dat werkte met sexagesimale getallen om fracties aan te geven.

Een tweede, zeer beroemd boek uit de tijd van de Grieken is de “Syntaxis” (ook wel bekend als de “Almagest”) van Claudius Ptolemaios. Tot Copernicus’ werken in de vijftiende eeuw is dit een van de belangrijkste boeken voor de astronomie geweest.

Diophantus’ “Arithmetica” was een zeer origineel werk onder de Grieken. Het richtte zich louter op algebra en bevatte geen grammetje meetkunde. Het boek bevatte een grote hoeveelheid voorbeeldsommen die van begin tot eind werden uitgewerkt, waarbij de lezer het initiatief en de inzicht moest hebben om de voorbeelden toe te passen op andere getallen.

Na 300 AD ging er wat creativiteit verloren in de Griekse wiskunde. Het werd vooral populair om oude werken van anderen te analyseren en van commentaar te voorzien. Pappus’ “Collecties” is één van de bekendste en waardevolste werken. Vooral zijn uitleg van het analytische proces voor het vinden van bewijzen heeft ons veel geleerd (mede omdat het op bepaalde punten nogal “vaag” was geschreven).

Rond de vijfde eeuw AD zien we het einde van de Griekse wiskunde.

Dit alles gezegd hebbende is het belangrijk om te onthouden dat al het voorgaande betrekking heeft op de academische wiskunde. In het dagelijks leven hield men zich wel degelijk bezig met echte getallen en met rekenkunde. Men moest immers ook geld verdienen ;)

3. Meanwhile, in India

Na 400 BC was het politieke klimaat in Europa niet zo geschikt voor verdere, wiskundige ontwikkeling. Het Romeinse rijk begon af te brokkelen en werd kleiner. De Griekse wetenschappers raakten geïnteresseerd in andere zaken. Bovendien kwam in de zevende eeuw de Islam opzetten, met veel veroveringen tot in de achtste eeuw.

In deze rusteloze periode werd er wel wiskunde bedreven, maar het diende vooral het praktische nut. Veel diepgang had de wiskunde niet en wanneer men poogde er nog iets interessants over te zeggen, dan was het vaak een bijeen geraapt zootje.

In India liepen de wiskundige ontwikkelingen echter verder!

Periode	Wie / Waar	Ontwikkeling
6 ^e eeuw	Aryabhata Bhaskara I Brahmagupta	Het decimale, positionele stelsel.
6 ^e eeuw		Negatieve getallen
7 ^e eeuw		
12 ^e eeuw	Bhaskara II	Het getal 0. Zie ook schets 3.

Zoals ook in schetsen 1 en 3 wordt verteld is het positionele, decimale stelsel één van de belangrijkste ontwikkelingen van de Indiërs. Zij:

- Kozen negen symbolen, voor de waardes 1 tot en met 9.
- Kozen voor een positioneel systeem, op basis van de machten van 10.
- Gebruikten een stip, of cirkel, om een lege positie aan te geven.

Deze ontwikkeling verspreidde zich razendsnel door de wereld. In de zesde eeuw was het gebruik nog beperkt tot India, waar men ook de vereiste rekenregels opstelde. In 662 dook het op in Syrië, om niet lang daarna in Cambodja en China op te duiken. In de negende eeuw was het systeem ook bekend in Bagdad, vanwaar het doorging naar Europa.

De Indiërs hebben een grote invloed gehad op de ontwikkeling van trigonometrie en de sinusfunctie. Hun belangrijkste toevoeging was het gebruik van de “half-koord”, wiens naam uiteindelijk leidde tot de ontwikkeling van het woord “sinus”. Zie daarvoor schets 18.

Daarnaast hebben zij ook de hand gehad in:

- Vierkantswortels en derdemachtswortels
- Tweedegraads vergelijkingen
- Vergelijkingen met meervoudige variabelen, met gehele getallen

Dit alles overigens zonder enig logisch bewijs of onderbouwing!

4. Arabic mathematics

Rond 750 AD was de expansiedrift had de Arabieren zijn top bereikt. Het Islamitische rijk strekte van Spanje tot aan India. Om zeker te weten dat zij hun macht over het rijk goed uit konden oefenen, stichtten de Abbasiden de stad Bagdad, aan de Tigris. Al snel werd deze stad een verzamelpunt van cultuur en wetenschap.

Van de vele werken die in Bagdad werden verzameld was Euclides' "De elementen" één van de eersten die werd vertaald. De Arabieren omarmden de Euclidische meetkunde en zijn methode van logische onderbouwing en bewijsvoering. Deze nieuwe, door de Arabische taal gedragen, wiskundige traditie liep van de negende to in de veertiende eeuw.

De eerste Arabische wiskundige die naam voor zichzelf maakte, was Muhammed Ibn Musa Al-Khwarizmi (zie schetsen 1 en 10). Aan de hand van Indische documenten ontwikkelde hij het decimale, positionele telsysteem verder. Ook schreef hij de "Al-jabr w'al-myqabala", wiens eerste woord uiteindelijk heeft geleid tot het woord "algebra". Dit boek behandelt onder andere tweedegraads vergelijkingen, praktische geometrie, lineaire vergelijkingen en het uitrekenen van erfenissen. Saillant detail: het was de verbastering van de naam "Al-Khwarizmi" die uiteindelijk heeft geleid tot het woord "algoritme".

Een volgende, beroemde wiskundige is Umar Al-Khayammi (Omar Khayyam), die vooral bekend is geworden door zijn poëzie. Hij was vooral geïnteresseerd in het oplossen van derdegraads vergelijkingen en vond daar een meetkundige oplossing voor. Ook stelde hij dat we in de meetkunde wel degelijk met getallen kunnen werken voor het afmeten van een lengte. Zolang we één specifieke lengte aanstellen als "1", dan kunnen we elke lengte afmeten die wij willen.

Andere gebieden waarin met sterk was geïnteresseerd:

- Meetkunde en trigonometrie
- Combinatieleer
- Getaltheorie

Door de strenge eisen die de Islam stelt (stelde?) aan kunstuitingen, hebben de Arabieren een erg opmerkelijke vorm van versieringen uitgevonden. Omdat hun geloof hen verbood om mensen of delen van het menselijk lichaam af te beelden, versierden zij gebouwen en gebruiksvoorwerpen met meetkundige figuren en zich herhalende patronen. Hoewel deze patronen waarschijnlijk zijn aangebracht door vaklieden met weinig kennis van wiskunde, steekt er toch wel degelijk veel wiskunde achter. Het is immers niet zomaar mogelijk om een bepaald figuur X keer te herhalen op een eindig vlak.

5. Medieval Europe

Rond de tiende eeuw AD kwam Europa tot rust en was er weer genoeg tijd om zich te richten op literaire en wetenschappelijke inspanningen. Dit kwam tot uiting in de oprichting van kathedrale scholen, die later zouden leiden tot de oprichting van universiteiten in de grote steden. Tot dat zou gebeuren reisden de meeste mensen af naar Islamitische bolwerken, zoals Spanje, om wiskunde te studeren.

Omdat Spanje ver van Bagdad af ligt kreeg men eigenlijk maar weinig van de wiskundige boeken uit Arabië aangeleverd. Alleen de lichtere, of populaire boeken druppelden uiteindelijk Europa binnen. Onder andere Al-Khwarizmi's werk "Al-Jabra" vond zijn weg naar Spanje. Overigens was het Robert of Chester's vertaling uit 1145 die de titel "Algebra" droeg.

Op de universiteiten richtte men zich overigens niet zeer sterk op wiskunde. Men was meer geïnteresseerd in natuurkunde en de bewegingsleer. Nicole van Oresme's (1320-1382) werk in de bewegingsleer leidde onder andere tot een grafische voorstelling van veranderingen die sterk lijkt op onze huidige manier van grafieken tekenen.

De Italiaan Leonardo van Pisa (ook wel Leonardo Fibonacci) schreef in de twaalfde eeuw een aantal waardevolle boeken.

- "Liber Abacci" (boek van berekeningen). Gaat in op het decimale, positionele telsysteem en op vele, praktische rekenproblemen.
- "Practica Geometriae" (praktische meetkunde).
- "Liber Quadratorum" (boek van kwadraten). Gaat in op het oplossen van tweedegraads vergelijkingen, met gehele getallen en meerdere variabelen. Zijn werk loopt ongeveer 400 jaar voor op dat van Fermat en Euler.

In de tweede helft van de vijftiende eeuw schreef Luca Pacioli uiteindelijk zijn "Summa de aritmetica, geometria, proportionione e proportionalita": een samenvatting van alle bekende rekenkunde, meetkunde en verhoudingsleer.

6. The 15th and 16th centuries

Tot nu toe had een aantal culturen hun eigen vormen van wiskunde, afzonderlijk van elkander, ontwikkeld. Met de ontdekkingsreizen van de Europeanen kwam achter ook de verspreiding van het Christendom. Jezuïeten stichtten overal in de wereld kerken en scholen, zodat uiteindelijk de Europese vorm van wiskunde overal de bovenhand had.

Voor deze ontdekkingsreizen was navigatie absoluut onmisbaar. Het is met die duizenden kilometers aan open zee niet de bedoeling dat je verdwaalt natuurlijk :) Hierdoor waren in de Renaissance vooral de trigonometrie en algebra erg populair.

Men standaardiseerde de verscheidene trigonometrische functies en bedacht nieuwe formules en toepassingen. Deze functies hadden nog steeds betrekking op lengte-eenheden en niet op verhoudingen. Sinustabellen gaven nog steeds alleen die waarden die betrekking hadden op één gegeven cirkel. Voor alle overige cirkels diende men nog steeds een omrekening uit te voeren.

Overigens ontwikkelde de Italiaanse kunstenaars in de Renaissance ook een oog voor perspectief. Zij slaagden er in afbeeldingen te maken die driedimensionaal oogden en zij stelden een aantal teken- en rekenregels op voor dit doel.

7. Algebra comes of age

In de zestiende en zeventiende eeuwen gebeurt zoveel op wiskundig vlak, dat het te veel is om allemaal te bespreken. Het lesboek beperkt zich dan ook tot een aantal belangrijke personen, die een grote stempel hebben gedrukt op de ontwikkeling van de wiskunde. We zien in ieder geval dat algebra steeds populairder wordt en dat men het serieus begint te nemen.

In het vorige hoofdstuk bespraken wij al kort Leonardo van Pisa's "Liber abbaci". In dit Italiaanse boek over algebra en rekenkunde werden problemen nog beschreven met behulp van volzinnen. In de eeuw die volgt op de publicatie van dit boek gaat men steeds verder over naar een symbolische schrijfwijze. Onbelangrijke woorden uit de zinnen worden weggelaten en de belangrijkste woorden worden afgekort weergegeven.

De oorsprong van de term "cossisten" en de "cossistische kunst" (zie Schets 8) ligt in het Italiaanse woord "cosa" ("ding"). Aanvankelijk werd dit woord (en het verangliceerde "coss") gebruikt om een onbekende, gezochte hoeveelheid aan te duiden.

De verschillende cossisten hadden in hun aanpak van algebra aanvankelijk elk nog een eigen notatie; er was geen sprake van standaardisatie. De wijze van het afkorten van woorden, het gebruiken van verschillende symbolen, het uitdrukken van het gezochte: ieder had een eigen aanpak.

Een lange tijd was het overigens niet mogelijk om formules en sommen uit te schrijven met meer dan één onbekende factor. Zo kon men wel $x^2 + 10x = 39$ schrijven, maar niet $ax + bx = c$.

Een aantal belangrijke personen zijn:

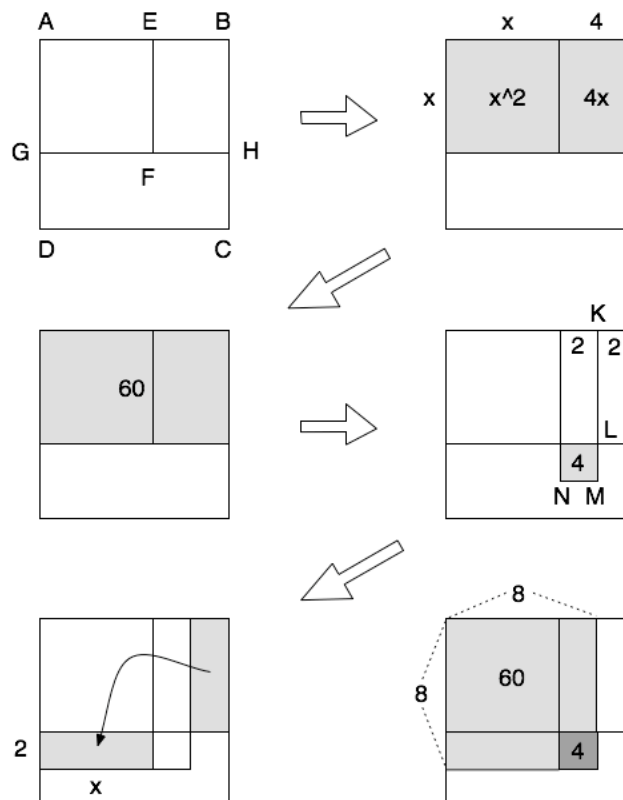
Robert Recorde	Engeland, 1510-1558	Auteur van "The whetstone of witte" en "The grounde of artes".
Pedro Nunes	Portugal, 1502-1578	Bekende cossist.
Michael Stifel	Duitsland, 1486-1567	Bekende cossist.
Scipione del Ferro	Italië, 1465-1526	Vond een oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen.
Niccolo Fontana (Tartaglia)	Italië, 1500-1557	Vond een oplossingsmethode voor derdegraads vergelijkingen.
Girolamo Cardano	Italië, 1501-1576	Ging aan de haal met Tartaglia's methode en schreef de "Ars magna".
Lodovico Ferrari	Italië, 1522-1565	Vond een oplossingsmethode voor vierdegraads vergelijkingen.
Rafael Bombelli	Italië, 1526-1572	Bedacht een methode om om te gaan met wortels van negatieve getallen. Verbond tevens algebra met meetkunde door te stellen dat je ook x^2 gelijk kon stellen aan de lengte van een lijn en niet persé een oppervlak.

François Viète	Frankrijk, 1540-1603	Vond een manier om met meerdere variabelen tegelijk te werken. Zo gebruikte hij klinkers voor variabelen met bekende waarden (onze A, B, C) en medeklinkers voor gezochte variabelen (onze X). Maakte algebra ook populair door een Griekse oorsprong te opperen.
René Descartes	Frankrijk, 1596-1650	Schreef “La géométrie” en maakte de voorzet voor onze moderne notatie $ax^2 + bx = c$. “Lage” letters zijn bekende waardes en “hoge” letters zijn gezochte waardes. Bevestigde Bombelli’s idee over lijnlengtes.
Pièrre de Fermat	Frankrijk, 1601-1665	Bedacht oa de coördinatenmeetkunde en zocht naar bewijzen voor “negatieve proposities”: vergelijkingen zonder oplossing.

De belangrijkste ontwikkelingen uit deze tijd:

- Door vijfdegraads vergelijkingen gingen de cossisten steeds diepere vragen stellen.
- Descartes en Fermat koppelden algebra aan meetkunde en vonden zo de coördinatenmeetkunde uit.
- Fermat verzoon nog een heleboel nieuwe, interessante problemen die gebaseerd waren op die van de Griek Diophantus.

In de les hebben we overigens ook kort het werk van de Nederlandse wiskundige Stampioen besproken. Hij hield zich bezig met de landmeetkunde, ten tijde van de Tachtigjarige Oorlog. Zijn methode voor het oplossen van een tweedegraads vergelijking lijkt sterk op die van Al-Khwarizmi (zie ook Schets 10).



8. Calculus and applied mathematics

Buiten de cossisten waren er ook andere geleerden die gretig gebruik maakten van algebra. Zo waren er de astronomen en de natuurkundigen die deze rekenmethodes aangrepen om de wereld te verklaren.

Galileo Galilei	Italië, 1564-1642	Astronomie, bewegingsleer. Stelde dat de zon het centrum van ons sterrenstelsel is.
Johannes Kepler	Duitsland, 1571-1630	Ontdekte de elliptische banen van planeten rondom de zon en stelde formules op voor hun bewegingssnelheid.
Marin Mersenne	Frankrijk, 1588-1648	Probeerde geleerden van verschillende vlakken samen te laten werken, om tot een beter inzicht te komen.
Thomas Harriot	Engeland, 1560-1621	Gebruikte algebra onder andere op de gebieden van optica en navigatie.
René Descartes	Frankrijk, 1596-1650	Verdiepte zich in fotonica en kometen.
Bnaventura Cavalieri	Italië, 1598-1647	Stelde dat een vlak is opgebouwd uit een oneindig aantal lijnen en dat een object is opgebouwd uit een oneindig aantal vlakken. Erg handig bij het rekenen met gebolde en gebogen oppervlakken!
Isaac Newton	Engeland, 1642-1727	We kennen hem van de appel en de zwaartekracht. Hij bedacht echter ook een oplossingsmethode bij Cavalieri's ideeën.
Gottfried Leibniz	Duitsland, 1646-1716	Bedacht ook een oplossingsmethode bij Cavalieri's ideeën. Leidde uiteindelijk tot het concept "afgeleidde" en tot het rekenen met vaste "recepten" oftewel "calculus".
J en J Bernouilli	Duitsland	Jakob en Johann studeerden en onderwezen calculus. Johann schreef veel brieven, die later een boek werden.
Daniel Bernouilli	Duitsland, 1700-1782	Zoon van Johann en een natuurkundige. Werkte met mechanica en hydromechanica.
Maria Agnesi	Italië, 1718-1799	Eerste vrouw die haar eigen lesboek over calculus, meetkunde en algebra schreef.
Emilie de Chatelet	Frankrijk, 1706-1749	Vertaalde en verklaarde Newton's "Principia".
Leonhard Euler	Zwitserland, 1707-1783	Heeft meer dan tachtig werken geschreven over bijna elk denkbaar onderdeel van de wiskunde.
Pierre Laplace	Frankrijk, 1749-1827	Schreef over astronomie en kansberekening.
Joseph-Louis Lagrange	Frankrijk, 1736-1813	Schreef over vele wiskundige gebieden en combineerde dit met natuurkunde. Gebruikte nooit schema's in zijn teksten.
George Berkeley	Ierland, 1685-1753	Zocht en vond als bisschop veel fouten in de aannames achter algebra. Anti-atheïst.

9. Rigor and professionalism

Omdat er in de negentiende eeuw zo enorm veel ontwikkelingen hebben plaats gevonden, besteedt het boek aandacht aan de drie (in hun ogen) belangrijkste punten.

- Grondigheid, vooral mbt calculus.
- Natuurkundige vraagstukken.
- Het feit dat wiskunde weer een echt beroep werd.

Na de Franse revolutie in 1798 stichtten de revolutionairen een aantal nieuwe scholen, zoals de École Polytechnique in Parijs. Het doel was om de middenklasse van Frankrijk een hoop technische kennis te bieden. Door deze verandering werd nu van wiskundigen verwacht dat zij les zouden geven, lessen die bovendien begrijpelijk en correct moesten zijn. Hierdoor legde men al gauw de nadruk op helderheid, precisie en grondigheid.

Rond 1795 stelde de Franse overheid het metrieke stelsel in gebruik. Zo'n honderd jaar later was dit verheven tot een internationale standaard.

Aan het begin van de negentiende eeuw was Carl Friedrich Gauss (1777-1855) één van de belangrijkste wiskundigen. Zijn stijl van werken was kortaf, precies en zonder liflafjes. Precies wat men in die tijd wilde dus! Buiten de wiskunde hield Gauss zich ook bezig met de natuurkunde en astronomie. Het kwam vaak voor dat hij zijn werk in het ene veld liet beïnvloeden door werk in het andere.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) werd al op jonge leeftijd professor aan de École Polytechnique. Daar schreef hij onder andere "The école polytechnique course in analysis", welke de nieuwe basis voor calculus vormde. Gedreven door zijn doel om calculus op de "juiste manier" te doen, verkoos hij algebraïsche uitwerkingen boven diagrammen en meetkunde.

Karl Weierstrass (1815-1897) bouwde voort (en corrigeerde) op Cauchy's werk. In zijn lessen aan de universiteit van Berlijn wist hij calculus volledig te demystifiëren. Zijn methodes vertrouwden alleen op algebra, rekenkunde en logica.

Andere belangrijke namen.

Richard Dedekind	1831 – 1916	Theorie van getallensetten (zie Schets 25).
Giuseppe Peano	1858 – 1932	Theorie van getallensetten.
Georg Cantor	1845 – 1918	Theorie van getallensetten.
Adrien-Marie Legendre	18 ^e eeuw	Doorbraak in het begrip van oplossingsformules voor N-degraads vergelijkingen.
Niels Henrik Abel	1802 – 1829	Beweest dat er geen oplossingsformule is voor vijfegraads vergelijkingen.
Évariste Galois	1811 – 1832	Legde de basis voor de analyse van de oplosbaarheid van vergelijkingen, op basis van de theorie van groepen. Suggereerde dat men niet moet zoeken naar formules voor specifieke vormen van vergelijkingen, maar naar één formule voor elke vorm van die vergelijking.

Door het werk van Gauss te combineren met dat van János Bolyai, Nicolai Lobachevsky en Bernhard Riemann, ontdekte men uiteindelijk de niet-Euclidische meetkunde. Men richtte zich op abstractie en niet persé op de meetkunde van de echte wereld. Riemann's aanpak van de meetkunde heeft uiteindelijk Albert Einstein geholpen bij het begrijpen van zwaartekracht.

We zien dat in de negentiende eeuw veel diepgaande wiskunde wordt gedreven door haar toepassing in de natuurkunde. Electriciteit, mechanica, vloeistoffenleer, elasticiteit en stabiliteit van constructies: zij vereisen allemaal redelijk ingewikkelde wiskunde.

Joseph Fourier	1768 – 1830	Bedacht de Fourier reeksen, die helpen bij het bestuderen van licht, geluid en andere golfvormen.
Sophie Germain	1776 – 1831	Eén van Frankrijk's grootste wiskundigen, die in haar tijd compleet werd genegeerd. Verrichte groot werk op het gebied van elasticiteit.
Bernard Riemann	1826 – 1866	Heeft als genie bijgedragen aan de basis van veel wiskundige gebieden.
Felix Klein	1849 – 1925	Toonde het verband tussen niet-Euclidische meetkunde en algebra aan.
Henri Poincaré	1854 – 1912	Droeg bij aan de unificatie van de verschillende gebieden van de wiskunde.

Tegen het einde van de negentiende eeuw waren de meeste wiskundigen werkzaam aan universiteiten. Zij gaven les, deden onderzoek en organiseerden congressen zoals de in 1897 voor het eerst gehouden "International Congress of Mathematicians". Dit congress wordt sinds 1904 elke vier jaar gehouden.

10. Abstraction, computers and new applications

In 1900 geeft David Hilbert (1862 – 1943) een “keynote address” op het ICM congress in Parijs. Hij stelde daar een lijst met drieëntwintig vraagstukken op, waarvan hij verwachtte dat zij in de twintigste eeuw belangrijk zouden worden. Zijn verwachtingen kwamen grotendeels uit en het onderzoek naar zijn vraagstukken heeft tot grote vooruitgang geleid in de twintigste eeuw.

Een leuk stukje trivia: men schat dat 95% van de huidige, bekende wiskunde na 1900 is uitgevonden. Dit geeft maar aan hoe snel de ontwikkelingen zijn gegaan in de twintigste eeuw. Door de drang naar meer abstractie zijn er veel nieuwe subgebieden binnen de wiskunde ontstaan en is men tevens in staat geworden om oude raadsels op te lossen.

In de vroege, twintigste eeuw ontstond overigens nog een “heilige oorlog” tussen de Intuitionisten en de Formalisten. De eersten vonden dat de wiskunde helemaal niet zo goed was onderbouwd en dat men veel regels en stellingen gebruikte die afbreuk deden aan de betrouwbaarheid. Aan de andere kant vonden de formalisten juist dat wiskunde de ultieme waarheid bood, door formele manipulatie van symbolen. In de jaren dertig verloren beide kampen de kracht om te vechten, toen Kurt Gödel bewees dat onmogelijk is om te bewijzen dat één van beide kampen altijd gelijk zou hebben.

In de jaren dertig besloot een collectief van jonge wiskundigen dat de oude garde niet genoeg deed met alle nieuwe ontdekkingen. Zij vormden een pact om als collectief een serie boeken te schrijven die de fundamenteën van de nieuwe wiskunde uitleggen. Deze boeken werden gepubliceerd onder de naam van “Nicolas Bourbaki”, een aangenomen identiteit die zijn eigen leven is gaan leiden. De leden van Bourbaki vonden dat de creatieve wiskunde iets is dat je het beste over kan laten aan de jonge honden. Hun leden werden daarom op hun vijftigste uit de groep gezet, waarbij zij een opvolger moesten voordragen. Ook de Bourbaki groep richtte een eigen, regelmatig terugkerend evenement op: de “Seminaire Bourbaki”, die nog steeds elke drie jaar wordt gehouden.

De Bourbaki boeken, bekend als “De elementen der wiskunde” zijn overigens nooit bedoeld als didactische boeken. Net als Euclides’ “Elementen” waren zij eerder bedoeld om de tot dan toe bekende wiskunde te verzamelen en te formaliseren.

In de tweede helft van de twintigste eeuw zagen we de opkomst van de computer. Aanvankelijk waren wiskundigen nog veel betrokken bij het ontwerpen en bouwen van deze apparaten, terwijl zij later vooral de gebruikers van computers werden. Computers hebben de wiskunde op drie manieren sterk veranderd:

- Zij stellen wiskundigen in staat om aannames en gissingen te beproeven en om nieuwe uitkomsten te ontdekken. Met behulp van computers zijn we niet persé in staat om het correcte antwoord te vinden, maar de gevonden uitkomsten kunnen ons wel de juiste kant op sturen.
- Zij stellen ons in staat om simulaties en visualisaties uit te voeren. Door met een computer-programma de werkelijkheid te beschrijven en te benaderen (een exacte voorstelling is vaak niet mogelijk) kunnen we vaak een tevredenstellend antwoord vinden.
- Zij kunnen ons veel werk uit handen nemen. Tegenwoordig zijn er honderden programma’s die wiskunde kunnen “doen”. We geven ze de gewenste bewerkingen en zij voeren deze bewerkingen uit op alle gewenste inputwaarden.

Vooral deze laatste stap heeft ook veel invloed op het wiskunde onderwijs. Immers, als de computer het werk voor ons kan doen, waarom zouden wij deze bewerkingen dan nog aanleren op school?

11. Mathematics today

Tegenwoordig is wiskunde niet meer weg te denken uit de academische wereld. Niet alleen de pure wiskunde, maar ook de wiskunde die je tegenkomt bij natuurkunde, biologie en computerkunde. Deze toegepaste wiskunde wordt doorgaans bedreven door specialisten op dat specifieke vlak, waardoor zij nagenoeg onbegrijpelijk is geworden voor de “gewone” wiskundige.

We zijn de oude wiskunde (voor 1900) ver voorbij; moderne wiskunde is niet meer iets dat door één persoon volledig kan worden begrepen.

S-1. Keeping count, writing whole numbers

Door de eeuwen heen heeft de mens meerdere manieren gezocht en gevonden om aantallen en getallen weer te geven.

De allersimpelste vorm die wij kennen is het turven. Men zet een streepje voor elk getelde object, met de optie om elk vijfde streepje diagonaal te zetten. Het nadeel van deze methode is dat je erg veel streepjes moet zetten voor een groot getal. Bovendien is het niet in één oogopslag te lezen.

Glyph	Waarde
	1
	10
	100
	1.000
	10.000
	100.000
	1.000.000

Tussen 3000 BC en 1000 BC bedachten de Egyptenaren hun eigen oplossing voor dit probleem. Zij namen een aantal hiërogliefen en kenden hen een hogere waarde dan “1” toe.

De ordening van deze tekens maakte niet uit: een getal werd weergegeven door groepjes van hiërogliefen. Het nadeel van deze methode is dat getallen alsnog best lang kunnen worden en dat je alsnog een optelsom moet maken.

Deze hiërogliefen zijn ongeveer 2000 jaren gebruikt, tot men over stapte op pen en papier. Men stapte toen over op een systeem waarbij men symbolen had voor elke veelvoud op een decimale positie. Men had symbolen voor 1 t/m 9, voor 10 t/m 90, voor 100 t/m 900 en voor 1000 t/m 9000. Dit maakte het mogelijk getallen veel compacter te noteren, met als nadeel dat men nu veertig verschillende symbolen moest onthouden (vier sets van tien symbolen).

Tussen 2000 en 200 BC ontwikkelden de Mesopotamiërs een systeem waarbij de positie van symbolen belangrijk werd. Hun sexagesimale systeem werkte vergelijkbaar met ons decimale systeem.

De waarde van elke positie wordt vermenigvuldigd met een macht van zestig. De meest rechter positie wordt vermenigvuldigd met 60^0 . Voor elke positie naar links, wordt de macht met één opgehoogd. Zo worden de vermenigvuldigingsfactoren: ... 60^3 60^2 60^1 60^0 .

Binnen elke positie werd de waarde genoteerd met behulp van twee verschillende symbolen: | (1) en < (10). Dit schrift heet in het engels “cuneiform”. Beiden waren simpel met een stift in een kleitablet te graveren. Tussen elke positie plaatst men een spatie, of open ruimte om het onderscheid duidelijk te maken. Het nadeel van dit systeem is dat niet duidelijk wordt of men één of meerdere posities overslaat tussen twee waardes.

Het systeem van de Maya's (omstreeks 300 BC) lijkt op dat van de Babyloniërs, in zoverre dat zij ook met een positioneel systeem werkten. Echter, zij hadden ook een oplossing gevonden voor het aangeven van “ongebruikte” positie: een nulwaarde. Dit systeem werd overigens verticaal weergegeven, met de laagst gewaardeerde positie onderaan.

Binnen elke positie wordt de waarde aangegeven met punten (eenheden) en horizontale strepen (vijftallen). Strepen worden hierbij bovenop elkander gestapeld, met de punten naast elkander er bovenop. De vermenigvuldigingsfactoren van elke positie lopen als volgt op: ... 18×20^3 18×20^2 20^1 20^0 . De extra factor van 18 is opvallend, aangezien 20 het belangrijkste getal lijkt te zijn.

De Grieken hadden een numeriek systeem welke op hun alfabet was gebaseerd: negen letters voor de eenheden, negen voor de tientallen en negen voor de honderdtallen. Dit vereiste echter twee extra tekens, omdat er maar 25 letters waren. Daarnaast was er ook een speciale indicator die werd gebruikt als een getal met duizend moest worden vermenigvuldigd.

Symb.	Waarde
I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1.000

De Romeinen gebruikten net als de Egyptenaren een additief systeem, in plaats van een positioneel systeem. De waarde van de symbolen moet bij elkander worden opgeteld om tot het eindresultaat te komen. Indien een getal met duizend moest worden vermenigvuldigd, zette men er een streep boven. Voor elke streep volgt een vermenigvuldiging met duizend, zodat men ook miljoenen en verder kon maken.

Eén opmerkelijke uitzondering op de regel van dit additieve systeem, is de efficiënte aftrek-regel waarmee notatie veel simpeler kon worden. Wanneer een symbool binnen een getal lager in waarde is dan zijn rechter buurman, dan dien je het linker van het rechter getal af te trekken. Bijv:

$$\text{MCMXCIV} = 1000 + 900 + 90 + 4 = 1994$$

Deze regel werd nog verduidelijkt dat je alleen meervouden van tien af mag trekken en alleen van de eerst volgende twee, grotere getallen. Je mag I dus van V en X aftrekken, maar niet van C bijvoorbeeld.

Ons huidige, numerieke systeem heet het Hindu-Arabische systeem. Uitgevonden door de Hindu's, geëvolueerd in Arabië en uiteindelijk toegepast in Europa. Het is een positioneel systeem, waarbij de waarde van elke positie wordt vermenigvuldigd met een macht van tien. Er zijn tien symbolen (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9), wat volgens sommigen zijn oorsprong vindt in het tellen op de vingers.

Het heeft nog lang geduurd voordat dit systeem het Romeinse compleet verving. Dit was voornamelijk omdat het erg simpel is om achter bijvoorbeeld een geldbedrag een extra nulletje te zetten.

Ons huidige systeem is echter uitstekend geschikt voor rekenen!

S-4. Broken numbers, writing fractions

Ongehele getallen zijn al meer dan twee duizend jaar onderdeel van onze wiskunde. Echter, de breuken zoals wij hen kennen zijn nog redelijk nieuw.

Aanvankelijk werkte men steeds kleinere, maar tastbare eenheden, om zo tot het gewenste getal te werken. Denk daarbij aan de maten als de duim, de el, de inch en de voet.

Later ging men werken met “eenheidsfracties”, wat wij tegenwoordig “één X-de” zouden noemen. Zo kende men vroeger “drie vijfde” niet, maar wel “een half en een tiende”. Het noteren van breuken was zo erg simpel, omdat de teller altijd 1 was. Zo kon je een extra symbool bij een getal neerzetten, om aan te geven dat het een fractie is. De Egyptenaren gebruikten hier bijvoorbeeld een stip, of een ovaal, voor welke boven het getal kwam te staan.

Omdat het rekenen met fracties in een dergelijk systeem erg moeilijk is (een antwoord moet immers als een som van meerdere fracties worden aangeduid), werkte men vaak met tabellen. In deze tabellen kon je de uitkomsten van veel standaard sommen opzoeken.

Zoals in de samenvatting van hoofdstuk 1 werd beschreven, hadden de Babyloniërs hun sexagesimale systeem zo aangepast dat zij met fracties konden werken. Naast posities voor ... 603 602 601 en 600, hadden zij ook posities voor 60-1 60-2 enz. Dit werkt uitstekend, ware het niet dat zij geen aparte notatie voor deze posities hadden. Die zwakte waren we in hoofdstuk 1 ook al tegen gekomen.

Het sexagesimale systeem voor fracties is uiteindelijk overgenomen door de Grieken (bijv uren, minuten, seconden) en is nog eeuwenlang gebruikt in technische berekeningen. In het dagelijks leven maakte men echter gebruik van het Egyptische systeem.

Een ander, interessant systeem dat onder andere in Rusland werd toegepast ging ook uit van enkelvoudige fracties. Zij ging echter niet alleen uit van optelling, maar ook van vermenigvuldiging. Zo is $\frac{2}{15}$ bijvoorbeeld gelijk aan “Twee vijfde delen van een derde deel”. Of $\frac{7}{15}$ is “een derde deel van twee vijfde delen, en een derde deel”.

In ons huidige systeem zijn we afgestapt van dit geforceerde gebruik van eenheden. In plaats van het zoeken naar de grootste fractie die past, om daarna de rest aan te vullen met kleinere fracties, zoeken wij nu naar een kleinere fractie die je kan vermenigvuldigen om tot het resultaat te komen. We gebruiken nu dus twee getallen die elk een eigen betekenis aangeven: de noemer die aangeeft hoe groot de fractie is en de teller die aangeeft hoeveel je van deze fractie nodig hebt.

Het is opmerkelijk dat we in Liu Hui's werk uit 100 BC een perfecte beschrijving zien van het huidige, westerse gebruik van breuken. Het enige verschil is dat hij het gebruik van “ongepaste breuken” vermijdt. In plaats van “ $\frac{7}{3}$ ” schrijft hij bijvoorbeeld altijd “2 $\frac{1}{3}$ ”. Sterker nog, alle rekenregels die wij tegenwoordig hanteren, staan ook uitgelegd in zijn werk! Bijvoorbeeld dat we breuken gelijknamig maken, voordat we ze door elkander kunnen delen.

Via de Hindu's (rond 700 AD) is de schrijfwijze van teller boven noemer uiteindelijk in Europa terecht gekomen. Daarvoor schreven we onze breuken volledig uit. De horizontale scheidingstreep is uiteindelijk rond 1100 AD door de Arabieren geïntroduceerd. De notatie met de schuine streep tussen teller en noemer (die ik telkens in deze samenvatting hanteer) is overigens pas veel later, rond 1850, verschenen.

Het gebruik van percentages stamt uit de vijftiende en zestiende eeuwen, waarin men in commerciële toepassingen regelmatig werkte met honderdsten. Het rekenen met geld en met rentes bleek toen een erg handige methode te zijn.

In Simon Stevin's "De tiende", uit 1585, werden uiteindelijk de kommagetallen geïntroduceerd. Stevin realiseerde zich dat het met deze notatie heel simpel wordt om berekeningen uit te voeren met breuken. Wegens praktische redenen ging hij voorlopig voorbij aan oneindige decimalen. Al heel snel (binnen een aantal decennia) werden Stevin's kommagetallen overal toegepast. Het uniforme gebruik van de punt, of komma, als scheidingsteken liet echter nog even op zich wachten.

Eén van de belangrijkste effecten van Stevin's uitvinding is het feit dat dingen als "wortel 2" en Pi nu ook als werkelijke getallen werden gezien. Daarvoor waren zij lastige, geometrische voorstellingen die onmogelijk in een getal waren uit te drukken. Maar nu niet meer!

Tegenwoordig gebruiken we breuken, kommagetallen en percentages allemaal door elkaar. Door het gebruik van rekenmachines lijken komma-getallen erg belangrijk, maar breuken hebben nog steeds hun nut!

S-7. Measuring the circle, the story of π

Het getal dat wij Pi noemen is al eeuwen lang bekend. De Grieken hadden al ontdekt dat je bij elke, willekeurige cirkel Pi als antwoord krijgt wanneer je de omtrek deelt door de diameter. Wat dat betreft was het dus een meetkundig begrip, dat nog lang niet als een echt getal werd geschreven. Het was een constante, een meetkundige verhouding die altijd het zelfde blijft. Men wist ook dat deze constante vaker voorkwam, in andere berekeningen die betrekking hebben op cirkels.

Het symbool π is overigens pas later het symbool voor Pi geworden. Daarvoor was het gewoon één van de letters van het Griekse alfabet.

De exacte waarde van Pi is tot nog toe niet vastgesteld. Het lijkt zelfs een oneindige decimaal te zijn. In het verleden heeft men echter vele manieren verzonnen om de waarde te benaderen.

Periode	Wie / Waar	Benadering
1650 BC	Egypte	$4 \left(\frac{8}{9}\right)^2$
420 BC	Archimedes	Tussen $3 \left(\frac{10}{71}\right)$ en $3 \left(\frac{10}{70}\right) = 3 \left(\frac{1}{7}\right)$.
150 AD	Ptolemaios	$377/120$
480	Zu Chongzhi	$355/113$
530	Aryabhata	$62832/20000$
1600	?	Bekend tot 35 decimale plaatsen.
1706	William Jones	Eerste gebruik van symbool π .
1730	Leonhard Euler	Verder populariseren van symbool π .
1765	Johann Lambert	Bewijs dat π "irrationeel" is.
1873	William Shanks	Bekend tot 607 (527) decimale plaatsen.
1949	J. von Neumann	ENIAC berekent π tot 2035 plaatsen.
1987	Y. Kanada	NEC SX-2 berekent π tot 134.217.000 plaatsen.
1991	Chudnovsky	π bekend tot 2.260.321.336 plaatsen.
1999	Y. Kanada	π bekend tot 206.158.430.000 plaatsen.

Het is zeer opmerkelijk dat de berekening van Pi in 1991 is gemaakt met behulp van een thuis gebouwde supercomputer. De eerdere berekeningen waren gemaakt met behulp van staatseigendommen.

Het is in elk geval duidelijk dat Pi een oneindig getal. We kunnen wel veel getallen achter de komma ontdekken, maar een einde is er niet. Een praktisch nut overigens ook niet. Voor de meeste doeleinden is een gelimiteerde benadering van Pi namelijk ruim voldoende.

Dus waarom zouden we onderzoek doen naar de getallen achter de komma? Men is voornamelijk op zoek naar patronen. Zit er een herkenbare volgorde in de getallen? Komt één getal vaker voor dan de ander? Het vervelende is dat we niet eens weten waar we naar zouden moeten zoeken :) Daarnaast is ook het onderzoek naar de berekening-methode erg interessant. Welk algoritme gebruik je? Hoe programmeer je dit?

S-8. The cossic art, writing algebra with symbols

We hebben eerder al gelezen dat de beschrijving van (algebraïsche) sommen tot in de Renaissance volledig met volzinnen plaats vond. Pas in de Renaissance ging men op zoek naar verkortingen en naar alternatieve notaties (zie ook hoofdstuk 7). In deze schets doorlopen we de evolutie van notaties, om uiteindelijk tot onze moderne schrijfwijze te komen.

Aanvankelijk zullen we zien dat in vele talen de gezochte hoeveelheid (die wij kennen als X) wordt aangeduid met het woord “ding”. “The cossic art” betekent dan ook “de kunst van dingen”.

Symbol	Naam	Betekenis
	Shai	Arabisch. “Onbekende hoeveelheid”.
	Res, Causa	Latijn. “Ding”.
	Cosa	Italiaans. “Ding”.
	Coss	Duits. “Ding”.
p.	Plus	Optelling.
m.	Minus	Aftrekking.
cu.	Cubo	Italiaans. “Kubus”. Derde macht van x.
ce.	Censo	Italiaans. Kwadraat van x.
co.	Cosa	Italiaans. “Ding”.
R		Italiaans. Vierkantswortel.
v.	Universale	Italiaans. Alles dat volgt staat tussen haakjes.
—		Italiaans. “Is gelijk aan”.
+	Plus	Duits. Optelling.
-	Minus	Duits. Aftrekking.
√	Surd	Duits. Vierkantswortel.
aequ.		Duits. “Is gelijk aan”.
	Cubus	Duits. Michael Stifel. Derde macht van x.
	Zensus	Duits. Michael Stifel. Kwadraat van x.
	Radix	Duits. Michael Stifel. De onbekende hoeveelheid.
<u>a b c</u>	Universale	Duits. Michael Stifel. Alles op de streep staat tussen haakjes.
A ^b		Frans. Nicholas Chuquet. Staat voor Ax ^b .
R ^b .		Frans. Nicholas Chuquet. Staat voor ^b √x.
montent		Frans. Nicholas Chuquet. “Is gelijk aan”.
A E I O U		Frans. François Viète. “Onbekende hoeveelheid”.
B D G enz.		Frans. François Viète. Vermenigvuldigingsfactoren.
5aaa		Engels. Thomas Harriot. Staat voor 5a ³ .
5a3		Frans. Pierre Hérigone. Staat voor 5a ³ .
5a ⁱⁱⁱ		Frans. James Hume. Staat voor 5a ³ .
5a ³		Frans. René Descartes. Staat voor 5a ³ .
x y z		Frans. René Descartes. “Onbekende hoeveelheid”.
a b c		Frans. René Descartes. Vermenigvuldigingsfactoren.
√ x + 6		Frans. René Descartes. Alles onder de streep tussen haakjes.
=		Engels. Robert Recorde. “Is gelijk aan”.

De symbolen van Stifel konden op basis van vermenigvuldiging worden gecombineerd om de vierde en zesde macht te maken. Hogere machten kregen weer nieuwe symbolen. De vijfde macht wordt vreemd genoeg niet genoemd.

François Viète's vernieuwingen leidden er toe dat men formules met meerdere onbekende variabelen kon schrijven. Denk bijvoorbeeld aan (B * A) + (C * E) = D.

S-9. Linear thinking, solving first degree equations

Lineaire verbanden kom je in het dagelijks leven veelvuldig tegen. Het is dan ook niet verwonderlijk dat zelfs de Egyptenaren al methoden zochten om dergelijke vraagstukken op te lossen.

Voor het oplossen van vermenigvuldigingsproblemen gebruikten zij een methode die wij kennen als “incorrecte stellingen” (“false posits”). In plaats van een berekening uit te voeren waarbij je met behulp van het verband achteruit rekent, rekenden zij stug vooruit. Zij stelden dat het juiste antwoord getal X moest zijn, waarna zij X invulden in de berekening.

$$Ax = B \rightarrow A(kx) = k(Ax) = kB$$

Men gokt dus een waarde voor x en vindt daardoor de vereiste factor k. Aan de hand van de uitkomst wordt het gekozen antwoord bijgesteld, zodat je dichterbij het werkelijke antwoord komt. De methode van incorrecte stellingen is eeuwenlang succesvol toegepast, in sommige gevallen zelfs voor zeer ingewikkelde berekeningen.

Voor het oplossen van problemen in de vorm van “ $Ax + C = B$ ” gebruikte men de “dubbele incorrecte stelling”. Deze methode is zo effectief dat zij eeuwen lang is toegepast. Sterker nog, zij vereist geen algebraïsche bewerkingen en werd daarom tot in de 19e eeuw nog onderwezen.

Het werkt als volgt:

- Maak een aanname voor de waarde van x.
- Vul deze waarde in en bereken de uitkomst $\rightarrow u1$.
- Bereken het verschil tussen deze uitkomst en de juiste uitkomst $\rightarrow v1$.
- Stel je eerste aanname bij en bereken opnieuw $\rightarrow u2$.
- Bereken het verschil tussen deze uitkomst en de juiste uitkomst $\rightarrow v2$.
- Maak nu een kruiselings vermenigvuldiging tussen beide sets uitkomsten. Vermenigvuldig $x1$ met $v2 \rightarrow x1v2$. Vermenigvuldig $x2$ met $v1 \rightarrow x2v1$.
- Bereken het verschil tussen beide verschillen $\rightarrow v1 - v2 = v3$. Bereken ook $x2v1 - x1v2 \rightarrow v4$.
- Deel $v4$ door $v3$.
- Je hebt het juiste antwoord gevonden.

Deze methode werkt alleen wanneer $u1$ en $u2$ beiden OF te hoog, OF te laag zijn ten opzicht van de gezochte uitkomst. Anders moet je namelijk een andere berekening gebruiken. Deze methode werkt overigens, omdat je op deze manier de helling van de grafiek van het lineaire verband gebruikt.

Lineaire berekeningen zijn niet alleen nuttig in praktische toepassingen. Omdat we non-lineaire verbanden nog niet volledig begrijpen, gebruiken we vaak lineaire berekeningen om hen te benaderen.

S-10. A square and things, quadratic equations

Tussen de negende en zestiende eeuw gebruikten bijna alle boeken over algebra de zelfde voorbeeldopgave voor het introduceren van tweedegraads vergelijkingen. Deze opgave is in de zevende eeuw opgesteld door de Arabier Muhammed Ibn Musa Al-Khwarizmi (geboren in Uzbekistan, leefde in Bagdad). Deze som luidde als volgt:

Een vierkant en tien wortels van dezelfde, zijn gelijk aan negenendertig. Dat is te zeggen, welk kwadraat, opgeteld met tien van zijn eigen wortels, is gelijk aan negendertig?

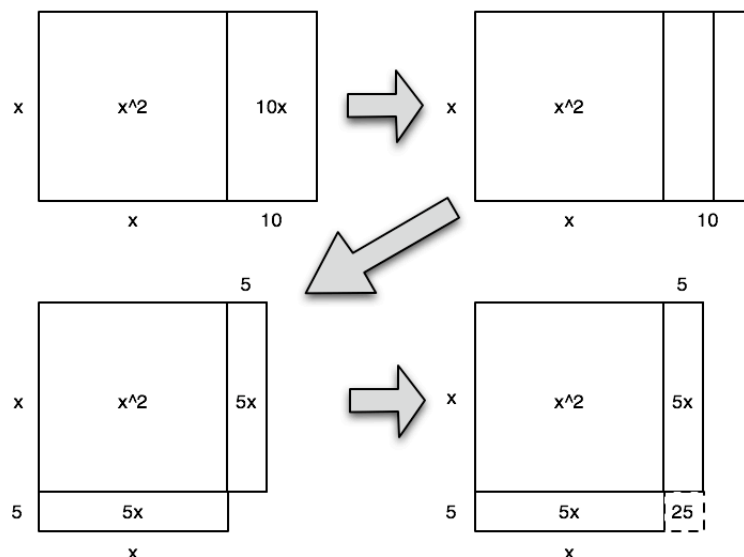
In die tijd werkte men nog niet met symbolische algebra (dat volgde pas in de zeventiende eeuw) en dus werden sommen volledig uitgeschreven. De uitwerking was als volgt.

- Halveer het aantal wortels, wat leidt tot vijf.
- Vermenigvuldig dit met zichzelf, wat leidt tot vijfentwintig.
- Tel hier negenendertig bij op, de som wordt zesenvieertig.
- Neem hier de wortel van, welke acht is en trek hier het aantal wortels (vijf) van af.
- De uitkomst is drie, welke de wortel is van het kwadraat dat je zoekt.

Als we dit op onze moderne manier uitschrijven, dan krijgen we een formule die we al jaren gebruiken bij dit soort sommen.

$$x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2} = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 + 4c}}{2}$$

Het mooie is dat dit ook geometrisch is te bewijzen.

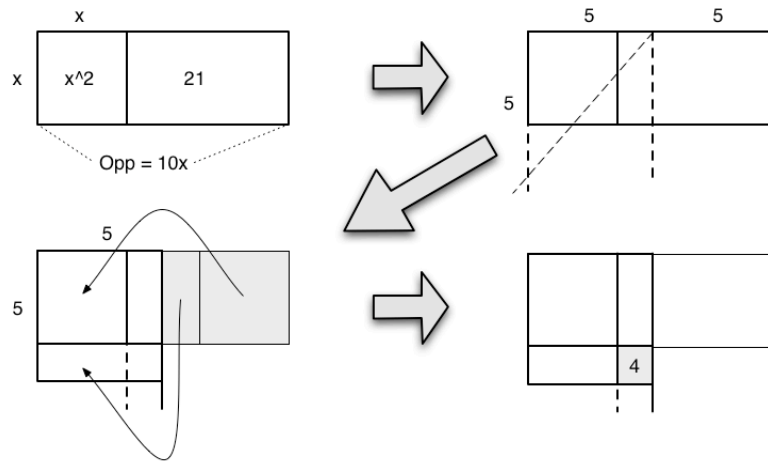


$$x^2 + 10x = 39 \rightarrow x^2 + (2 \cdot 5x) = 39 \rightarrow x^2 + 5x + 5x = 39$$

$$x^2 + 5x + 5x + 5^2 = 39 \rightarrow (x + 5)^2 = 64 \rightarrow x + 5 = 8 \rightarrow x = 3$$

Deze methode wordt overigens alleen voor sommen van de vorm $a x^2 + b x = c$ gebruikt. Voor de vormen $a x^2 + c = b x$ en $b x + c = x^2$ gebruikt men andere methoden. Men kende onze “algemene” formules voor tweedegraads vergelijkingen nog niet en zocht dus naar een methode per vorm.

Zoals bijvoorbeeld hier onder, de uitwerking van $x^2 + 21 = 10x$.



We zien dat meetkundig gezien $x^2 + 21 = 10x$. Omdat de korte zijde van de rechthoek gelijk is aan x , moet de lange zijde wel gelijk zijn aan 10. Halveren wij deze zijde tot lengte 5, dan kunnen wij een vierkant van $5 \times 5 = 25$ construeren. We zien dat in dit nieuwe vierkant x^2 al zit verwerkt en dat er twee stroken van $x(5-x)$, plus een kleiner vierkant bij in zitten.

Met enig leengedrag vanuit het oppervlak van de originele $x(5 + 5 - x)$ rechthoek, zien we dat het oppervlak van de 5×5 vierkant gelijk is aan 21, plus een beetje. Dit beetje is het extra, kleine vierkantje, wat betekent dat $x = 5 - 2 = 3$.

S-11. Intrigue in Renaissance Italy, solving cubic eq.

In Arabië was Umar Al-Khayammi (Omar Khayyam) de eerste die een goede poging waagde om derdegraads vergelijkingen op te lossen. Zie ook hoofdstuk 4. Omdat in Arabië negatieve getallen niet als werkelijkheid werden beschouwd, moest Al-Khayammi noodgedwongen een groot aantal verschillende formules definiëren voor het oplossen van verschillende “vormen” van derdegraads vergelijkingen. Uiteindelijk vond hij veertien verschillende vormen, die hij allen op meetkundige wijze kon uitwerken. Helaas heeft hij de algebraïsche uitwerking nooit uit kunnen dokteren.

In de middeleeuwen probeerden ook de Italiaanse “abbacisten” tot formules te komen voor het uitwerken van deze lastige vergelijkingen. Helaas leidde dat doorgaans tot niets. Men vond alleen uitwerkingen die pasten bij één specifiek voorbeeld, of men vond formules die bij nader inzien toch niet werkten.

In de Renaissance kwam daar verandering in (zie ook hoofdstuk 7). Ongeveer tegelijk kwamen Scipione del Ferro en Niccolo Fontana (ook bekend als Tartaglia) tot oplossingsformules voor twee verschillende vormen van de derdegraads vergelijkingen. Zij hielden deze formules angstvallig voor zichzelf, omdat zij daar toen nog veel geld mee konden verdienen. Del Ferro droeg voor zijn dood zijn kennis over aan zijn leerling Antonio Fiore. Na een wiskunde wedkamp tussen Fiore en Fontana trad er een derde partij ter tonele: Girolamo Cardano.

Cardano was wat we tegenwoordig een “Renaissance man” zouden noemen: hij hield zich op met verschillende gebieden van de wetenschap en wilde op elk gebied uitblinken. Anderen noemden hem weer een “glamourboy” die zelf maar weinig nuttig werk verrichte. Waar de waarheid precies ligt kunnen we nu natuurlijk niet meer achterhalen. Na veel verleiden en een eed van geheimhouding kreeg Cardano Fontana’s oplossingsmethode te horen en ging er zelf mee aan de slag. Zijn assistent Lodovico Ferrari paste dezelfde principes toe op vierdegraads vergelijkingen.

Zes jaren later kwam Cardano tot een universele oplossingsmethode die voor alle derdegraads vergelijkingen zou werken. Hij publiceerde dit werk (zich beroepend op het feit dat hij del Ferro’s werk gebruikte en niet die van Fontana) en bracht zo de rest van de wiskundige wereld op de hoogte. Dit boek, de “Ars Magna” bevatte tevens het werk van Ferrari. Fontana was natuurlijk ongelooflijk gekrenkt, maar kon verder niets meer doen aan deze schending van zijn rechten.

Cardano’s formule zag er uiteindelijk als volgt uit:

$$\begin{aligned}x^3 + px + q &= 0 \Rightarrow \\x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\end{aligned}$$

Het enige aan Cardano’s methode dat in die tijd nog verwarrend was, is het feit dat je in sommige gevallen de wortel van een negatief getal moet trekken (zie ook schets 17). Uiteindelijk heeft Rafael Bombelli het raadsel ontrafeld, door meetkundig te bewijzen dat de uitkomst van de formule altijd een positief getal zal zijn. Hij bewees dus dat het zelfs met de wortels van negatieve getallen mogelijk is om redelijke antwoorden te krijgen.

S-12. A cheerful fact, the Pythagorean theorem

We kennen allemaal de stelling “ $A^2 + B^2 = C^2$ ” en weten als het goed is ook dat die betrekking heeft op de twee rechte zijden en de hypotenusa van een rechthoekige driehoek. Deze regel is toegeschreven aan Pythagoras, terwijl daar eigenlijk weinig bewijs voor is. Sterker nog, in hoofdstuk 2 lasen we al dat Pythagoras mogelijk niet eens met wiskunde bezig was en dat deze ontdekking misschien door één van zijn latere volgelingen is ontdekt.

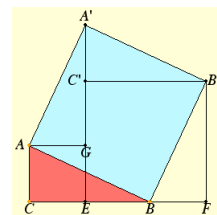
Desondanks was deze ontdekking niet gelimiteerd tot Griekenland. Ook in India, Egypte en Mesopotamië had men deze regel reeds in een of andere vorm ontdekt. Wat je ook veel terugziet in oude geschriften zijn drietallen van getallen die bij elkaar horen volgens deze regel, zoals 3, 4, 5. Blijkbaar had men methodes gevonden om goed passende drietallen te vinden die horen bij de stelling.

Hoewel het ontdekken van deze regel schijnbaar een natuurlijk proces was (je komt het zelfs tegen in kunst van Afrikaanse stammen), is het bewijzen een andere zaak. Eén van de bekendste methoden is die van het vierkant in een vierkant, waarbij je vier driehoeken in een vierkant legt, zodat hun hypotenusa's een nieuw vierkant vormen.

Bewijs:

- Vierkant1 oppervlak = $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- Vierkant2 oppervlak = c^2
- Driehoeken oppervlak = $4 * (1/2 * a * b) = 2ab$
- $c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab \rightarrow c^2 = a^2 + b^2$

Een ander bewijs wordt geleverd door de Arabier Thabit ibn-Qurra, uit het negende eeuwse Bagdad. Zijn bewijs is compleet zonder woorden en laat zien dat je uit een vierkant van $c * c$ twee vierkanten kan maken: één van $a * a$ en één van $b * b$. Oftewel: $c^2 = a^2 + b^2$, qed.



Er zijn vele verschillende bewijzen geleverd voor de stelling van Pythagoras. Eén van de beroemdste is echter inbegrepen in “De elementen” van Euclides. Euclides bewijst onder andere het volgende.

- Dat het oppervlak van drie vierkanten die grenzen aan een rechthoekige driehoek het verband $c^2 = a^2 + b^2$ vertoont. Onthoud: de Grieken rekenden niet met getallen, maar met verhoudingen.
- Dat de grootste van deze drie vierkanten simpel is op te delen in twee oppervlaktes gelijk aan de twee overige vierkanten. Dit door het tekenen van een loodlijn vanuit de rechte hoek.
- Dat een driehoek die door drie vierkanten wordt ingesloten, waarbij de grote de som is van de twee kleinere, een rechthoekige driehoek is.
- Dat de drie aangrenzende vlakken niet persé vierkanten hoeven te zijn, maar elke willekeurige vorm mogen hebben, zolang zij onderling exact de zelfde vorm hebben. De drie aangrenzende vlakken moeten dus vlekkeloos worden geschaald.
- Sterker nog! Deze laatste regel kan zelfs binnen de rechthoekige driehoek worden bewezen! Door een loodlijn te tekenen vanuit de rechte hoek, construeer je drie gelijkvormige driehoeken: ABC, BHC en ACH. ABC sluit aan op AB, BHC sluit aan op BC en ACH sluit aan op AC. En het is natuurlijk logisch dat de twee kleine driehoeken samen gelijk zijn aan de grote driehoek. Erg vernuftig, dit bewijs!

S-14. On beauty bare, Euclid's plane geometry

Euclides' grootste werk ligt niet in het opstellen van nieuwe regels en stellingen in de wiskunde. Nee, zijn grootste werk bestond uit het verzamelen en bewijzen van zoveel mogelijk eerder bedachte stellingen, zodat er één groot compendium ontstond met alle Griekse wiskunde.

Thales had lang daarvoor de jacht naar wetenschappelijke bewijzen achter wiskundige verschijnselen ingezet. Pythagoras en de zijnen en vele andere wiskundigen hadden honderden stellingen uitgevonden. Plato's filosofie en Aristoteles' logica waren beiden volledig geïntegreerd in de Griekse maatschappij. Dit alles leidde er samen toe dat Euclides zijn grote compendium schreef.

“De elementen” bestaat uit dertien boeken over verschillende onderwerpen. Het werk begint met een aantal definities van gebruikte termen en ideeën, zodat daar geen onduidelijkheid over kan bestaan. Daarna volgen een aantal aannames: stellingen waarvan men over het algemeen accepteert dat zij correct zijn. Op deze basis bouwt Euclides een logisch geheel, met stellingen die telkens worden bewezen door middel van een afbeelding en een formele beschrijving van het bewijs.

Boeken	Onderwerp
1, 2, 3, 4, 6	Meetkunde in het platte vlak
11, 12, 13	Meetkunde in objecten
5, 10	Lengtes en verhoudingen
7, 8, 9	Theorie van gehele getallen

En hoewel Euclides' werk enorm veel heeft bijgedragen aan de wiskunde zoals wij haar kennen, heeft “De elementen” nog een tweede grote waarde. Het boek is namelijk een toonbeeld van logica die triomfeert over de wereld die wij kennen. Het boek hangt volledig samen van logisch gevormde bewijzen die stap voor stap laten zien hoe je aan kan tonen dat iets correct en onomstotelijk waar is.

Euclides' werk heeft velen geïnspireerd tot het opbouwen van logische beredeneringen. Staatshoofden, uitvinders, wetenschappers, wetgeleerden: zij hebben allen iets gehad aan Euclides' werk.

Bij de overgang van het wiskundeonderwijs van de hoge scholen, naar het middelbaar onderwijs is overigens de nadruk op het vormen van logische bewijzen steeds verder in de verdrinking gekomen. Men leert nu geometrie met behulp van contexten en men ontdekt bepaalde regels als een groep. Maar het werken met echte bewijzen komt nog maar zelden voor. Sommigen vinden dat erg jammer.

S-15. In perfect shape, the Platonic solids

De oude Grieken waren gek op symmetrie, iets dat je in hun kunste en bouwkunde terug kan zien. In hun meetkunde werd redelijk wat aandacht besteed aan de regelmatige polygonen: regelmatige driehoeken, regelmatige vierhoeken, enz. Gebruiken we deze regelmatige polygonen om een ruimtelijk object te maken, dan kunnen we onder andere de regelmatige polyhedronen maken: een object dat is samengesteld uit een herhaling van één en het zelfde regelmatige polygoon.

Euclides bewees in zijn “Elementen” al dat er maar een zeer gelimiteerd aantal regelmatige polyhedronen bestaat. We kennen de volgende typen:

- Tetrahedron, met vier zijden gemaakt uit regelmatige driehoeken.
- Hexahedron, met zes zijden gemaakt uit regelmatige vierhoeken.
- Octahedron, met acht zijden gemaakt uit regelmatige driehoeken.
- Dodecahedron, met twaalf zijden gemaakt uit regelmatige vijfhoeken.
- Icosahedron, met twintig zijden gemaakt uit regelmatige driehoeken.

De Pythagoreanen en Plato raakten in deze vormen geïnteresseerd, omdat zij geloofden dat zij een belangrijke betekenis hebben in onze wereld. Elk van deze vormen zou staan voor één specifiek element (vuur, aarde, lucht, water), met een vijfde figuur (de dodecahedron) die het vijfde element (het universum) voorstelt. Door Plato’s interesse in deze vormen noemen we hen tegenwoordig “Platonische vaste stoffen”.

Kijken we naar figuren die niet persé uit één en dezelfde, regelmatige polygoon zijn opgebouwd, dan ontdekken we nog eens dertien figuren (origineel ontdekt door Archimedes). Het patroon op de moderne voetbal (samengesteld uit vijf- en zeshoeken) is er zo eentje. Johannes Kepler bewees later dat Archimedes het bij het rechte eind had en dat er niet meer dan dertien van deze vormen bestaan.

Kepler dacht overigens ooit te kunnen bewijzen dat de banen van de planeten in cirkels lopen en dat deze banen elkander snijden volgens de vormen van de Platonische vasten. Gelukkig gaf hij dit al snel op, om te realiseren dat de banen eigenlijk ellipsen zijn.

S-16. Shapes by the number, coordinate geometry

Wanneer men naar analytische meetkunde vraagt, zullen de meeste mensen denken aan een assenstelsel, of aan een coördinatenstelsel. Men noemt deze vaak het Cartesiaanse coördinaten systeem, ondanks het feit dat Descartes haar niet heeft uitgevonden.

Al in Egypte maakte men gebruik van een rechthoekig rooster, om zo kaarten te maken of om tekeningen te verscalen. Ook de Grieken en Romeinen gebruikten een dergelijk rooster met coördinaten voor het tekenen van kaarten. Dit gebruik heeft echter nog geen enkel verband met algebraïsche functies en vergelijkingen.

Rond 350BC deed Appolonius een eerste stap richting het samenbrengen van algebra en meetkunde, ook al was de eerste toen nog niet uitgevonden. In zijn werk met conische doorsneden en loci (de verzameling punten die voldoet aan een gestelde eis, tov een ander punt) was hij bezig met het uittekenen van knap ingewikkelde loci.

Nicole Oresme beschreef, voordat de algebraïsche notatie werd gestandaardiseerd, een methode om een grafiek te tekenen van twee variabelen, waarvan één afhankelijk was van de ander. François Viète bedacht in de zestiende eeuw dat men de Griekse meetkunde kon abstraheren door hoeveelheden te vervangen met letters en bewerkingen met formules.

Combineer het voorgaande met het werk van Pierre de Fermat (1601-1665) en René Descartes (1596-1650) en plots komen we een heel eind verder! Fermat bestudeerde rond 1630 het werk van Appolonius en definieerde een coördinatensysteem om de samenhang van twee variabelen grafisch weer te geven. Fermat's methode werkte echter nog niet zoals wij dat gewend zijn. Gebruik makend van onze bekende X en Y werkt het als volgt:

- Teken een horizontale lijn en verdeel deze in een schaal.
- Kies de gewenste X.
- Teken vanuit X een lijn omhoog, tot de gewenste lengte.
- De hoek van de lijnen naaar Y met de X-as hoeft geen negentig graden te zijn, maar moet wel voor alle lijnen even groot zijn.

Fermat's inzicht hield in dat hij, voor welke bewerking dan ook, een grafiek kon maken die het gedrag van deze formule weer geeft.

Later bouwde René Descartes in één van zijn studies voort op het werk van Fermat. In de appendix "La géométrie" van het boek "Discourse on method" beschreef hij de basis van wat later de analytische meetkunde zou worden.

Net als Fermat maakte hij gebruik van een horizontale x-as, een verticale y-beweging en stelde hij dat de hoek tussen deze twee assen vooral voor het gemak moest worden gekozen. Het feit dat Descartes machten niet zag als meetkundige objecten, maar als bewerkingen betekende dat men vanaf dat moment ook het gedrag van n-degraads vergelijkingen kon tekenen.

Descartes' werk vond overigens niet meteen gretig aftrek. Hij schreef zijn boeken in het Frans, in plaats van in het Latijn, en liet bovendien veel details van zijn uitwerkingen weg. Dit maakte zijn boeken niet bepaald populair. De Nederlandse wiskundige Frans van Schooten zorgde later voor een Latijnse vertaling die voorzien was van notities die de uitleg werkelijk duidelijk maakten.

Rond 1650 breidde John Wallis het coördinatensysteem uit, zodat negatieve getallen konden worden gebruikt. Pas in de achttiende eeuw introduceerde Leonhard Euler het concept van de verticale y-as.

S-17. Impossible, imaginary, useful complex numbers

Tot in de middeleeuwen hanteerde men binnen de wiskunde alleen getallen met een waarde van 0 of groter. Negatieve getallen werden gezien als onzinnig, alhoewel zij van tijd tot tijd toch de kop staken. Doorgaans hanteerde men de stelregel dat een negatieve uitkomst betekende dat een som geen oplossing heeft. Het zou een situatie zijn die niet realistisch is.

In Girolamo Cardano's "Ars Magna" (zie ook schetsen 8 en 11 en hoofdstuk 7) komen de wortels van negatieve getallen aan bod bij het oplossen van bepaalde, tweedegraads vergelijkingen. Cardano doet deze uitwerkingen vooralsnog af als onzin, of als nutteloze, intellectuele bezigheid. Later zou René Descartes nogmaals vaststellen dat een som met een negatieve uitkomst geen oplossing heeft. Hij probeerde de snijpunten van een rechte lijn en een cirkel vast te stellen en wanneer zij elkander niet snijden, is de uitkomst negatief.

Rafael Bombelli verzoon in de 1560's een manier om met deze moeilijkheid te kunnen werken. Hij bedacht een notatiewijze waarin de wortels van negatieve getallen anders werden weergegeven. In plaats van te spreken van de "wortel van minus honderdeenentwintig", sprak men nu van "de minus wortel van honderdeenentwintig". Dit werd een soort van code die aangaf dat je nog een wortel van een negatief getal toe moest voegen. Het bovenstaande valt ook te beschrijven als "twee plus de minus van 11".

Bijvoorbeeld:

$$2 + \sqrt{-121} = 2 + \sqrt{121} \cdot \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Het belangrijkste aan Bombelli's werk is dat hij bewees dat je soms met negatieve getallen (en zelfs de wortel daarvan!) moet werken om tot een positief antwoord te komen. In de decennia daarna zouden Girard en Descartes vast stellen dat een N^e -graads vergelijking ook N oplossingen heeft. Deze oplossingen zijn niet allen reëel en positief, maar kunnen ook reëel negatief of imaginair (complex) zijn.

De volgende, belangrijke ontwikkeling voor complexe getallen kwam met het werk van Abraham de Moivre, in de achttiende eeuw. Hij herkende onder andere dat er bepaalde gelijkenissen zijn te ontdekken tussen de formules voor het vermenigvuldigen van complexe getallen en van sinusoiden. Uiteindelijk leidde dit tot zijn bekendste werk, waarvan hier onder alleen de beginselen en de uiteindelijke formules worden weergegeven. Het lesboek toont helaas niet hoe je tot deze oplossing komt.

$$\begin{aligned} \star & (a + b \cdot i) * (c + d \cdot i) = (ac - bd) + i(bc + da) \\ \star & \cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\ \star & \sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) \\ \Rightarrow & (\cos(x) + i \cdot \sin(x))^n = \cos(nx) + i \cdot \sin(nx) \end{aligned}$$

Dankzij het werk van Moivre kwam Leonhard Euler later tot één van zijn bekendste formules:

$$e^{xi} = \cos(x) + i \cdot \sin(x)$$

In de negentiende eeuw volgden J. Argand en Gauss die complexe getallen relateerden aan de coördinatenmeetkunde. Door een complex getal ($x + yi$) uit te zetten op de x-as en y-as wordt het een en ander plotseling een stuk tastbaarder. William Hamilton voegde daar later aan toe dat het mogelijk is om de verschillende rekenkundige bewerkingen in het zelfde coördinatenvlak uit te werken, zodat je het hele "enge" i kon vermijden. Cauchy en Gauss ontwikkelden de calculus voor complexe getallen verder, zodat latere wiskundigen enorm krachtige berekeningen uit konden voeren.

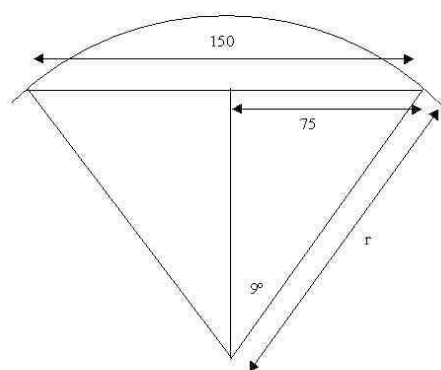
S-18. Half is better, sine and cosine

De Grieken zochten rond 190-120 BC naar methoden om de beweging van de sterren en planeten te voorspellen. Omdat deze objecten zich volgens hen bevonden op een reusachtige bol zou het werken met hoeken en graden erg nuttig zijn.

Aanvankelijk werkte Hipparchus van Rhodes met een systeem waarbij de bol een diameter van 3438 heeft. Dit resulteert in een bol met een omtrek van $21600 = 360 \cdot 60$, zodat er overeenstemming is tussen de lengte eenheid van de omtrek en het aantal minuten dat nodig is om 360 graden te draaien. Voor het beschrijven van de gereisde afstand van een object gebruikte men de eenheid van “een koord van β ”.¹

Claudius Ptolemaios staat met zijn “Almagest” bekend als één van de belangrijkste, Griekse astronomen. In zijn boek behandelt hij onder andere:

- Theorie en bewijs voor stellingen omtrent de koorden.
- De toepassing van koorden in het berekenen van sferische driehoeken.
- Een beschrijving van het maken van een tabel van koorden.
- Een methode om de koordlengtes voor hoeken van 0.5 graden tot 180 graden te bepalen.



In de vijfde eeuw AD volgde in India het inzicht dat het werken met halve koorden misschien beter zou werken. Zo kwam men tot de realisatie dat “de sinus een halve koord van de dubbele hoek” is.

Waar wij de sinus kennen als de verhouding tussen twee lijnstukken (overstaande zijde, gedeeld door schuine zijde (de straal)), dacht men in die tijd nog in de lengte van een specifiek lijnstuk in een gegeven cirkel. In het geval van de Indiërs moet je de sinus van een hoek dus nog vermenigvuldigen met de straal van de cirkel.

Van de zesde tot en met de twaalfde eeuw verschijnen in India steeds gecompliceerdere methoden voor het bepalen van half-koord tabellen. Helaas blijven zij nog steeds niets meer dan nauwkeurige benaderingen.

De Arabieren brachten hierna de volgende set vernieuwingen:

- Men realiseerde zich dat sinus-problemen gerelateerd zijn aan tweedegraads vergelijkingen.
- Men breidde de stof over sferische driehoeken verder uit.
- Men bedacht een “schaduw” functie die wij nu kennen als de tangens.
- Men verzong betere methoden voor het opstellen van de tabellen van half-koorden en “schaduwen”.

Ontstaan van het woord “sinus” uit het woord voor “half-koord”. De Indiërs noemden een half-koord letterlijk *jya-ardha*, of *jya*. De Arabieren kenden hier geen woord voor, dus kozen een nieuw woord: *jiba*. Omdat men echter geen klinkers schreef, stond er op papier “*jb*”. Europeanen verwarden dit later met het woord “*jaib*”, voor “baai”. Men koos in Europa dus het Latijnse woord voor “baai”, “sinus”.

¹ De precieze lengte van een “koord van β ” is helaas niet bewaard gebleven. Zij wordt gedefinieerd als zijnde de afstand tussen de snijpunten van twee lijnen uit het middelpunt van een cirkel, bij een gegeven diameter. De lengte van het koord verschilt per hoek β . Hipparchus maakte tabellen voor de verschillende hoek-lengte verhoudingen.

Het belangrijkste Europese, meetkundige werk uit de middeleeuwen stamt uit de vijftiende eeuw en is van de hand van Johannes Müller (aka Regiomontanus). Zijn boek “De triangulis omnimodis” bevat onder andere tabellen voor vele sinus-waarden voor een cirkel met straal 60.000. Müller meende nog steeds dat de sinus een lengtewaarde was en geen verhouding. Zijn werk heeft ook invloed gehad op de ontwikkeling van de cosinus functie (sinus complementi, oftewel “de complementaire sinus” ²).

Verdere ontwikkelingen:

Periode	Wie / Waar	Ontwikkeling
1515-1574	G. Rheticus	Het gebruik van sinus, zonder cirkels.
1561-1656	T. Fincke	Eerste gebruik woorden tangens en secant.
1561-1613	B. Pitiscus	Eerste gebruik woord trigonometrie.
1595	B. Pitiscus	Het gebruik in velden buiten astronomie.
17 ^e eeuw		Combineren van algebra en trigonometrie.
17 ^e eeuw	G. Roberval	Tekent een “per ongeluk” een sinusfunctie.
18 ^e eeuw	L. Euler	Stelt dat sinus een functie is van de hoek.

² De cosinus is ook wel de sinus van de overstaande hoek, oftewel $\cos \beta = \sin (90-\beta)$.

A-1. De 2/n tabel van de Rhind papyrus

Hier onder staat de volledige 2/n tabel uit de Rhind papyrus. Met dank aan dr Ron Knott voor het typewerk. De tabel beschrijft de vereenvoudiging van een 2/n breuk, naar meerdere stambreuken.

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$$

n	a	b	c	d	Anders	n	a	b	c	d	Anders
5	3	15				47	30	141	470		24 1128
7	4	28				49	28	196			25 1225
9	6	18			5 45	51	34	102			30 170
11	6	66									27 459
13	8	52	104		7 91	53	30	318	795		26 1326
15	10	30			8 120	55	30	330			27 1431
					9 45						40 88
					12 20						33 165
17	12	51	68		9 153	57	38	114			28 1540
19	12	76	114		10 190						33 209
21	14	42			11 231						30 570
					12 84						29 1653
					15 35	59	36	236	531		30 1770
23	12	276				61	40	244	488	610	31 1891
25	15	75			13 325	63	42	126			56 72
27	18	54			15 135						45 105
					24 378						36 252
29	24	58	174	232	15 435						35 315
31	20	124	155		16 496						33 693
33	22	66			21 77						32 2016
					18 198	65	39	195			45 117
					17 561						35 455
35	30	42			21 105						33 2145
					20 140	67	40	335	536		34 2278
					18 630	69	46	138			39 299
37	24	111	296		19 703						36 828
39	26	78			24 104						35 2415
					21 273	71	40	568	710		36 2556
					20 780	73	60	219	292	365	37 2701
41	24	246	328		21 861	75	50	150			60 100
43	42	86	129	301	22 946						45 225
45	30	90			36 60						42 350
					35 63						40 600
					27 135						39 975
					25 225						38 2850
					24 360						
					23 1035						

n	a	b	c	d	Anders
77	44	308			63 99 42 462 39 3003
79	60	237	316	790	40 3160
81	54	162			45 405 42 1134 41 3321
83	60	332	415	498	42 3486 166 249 498
85	51	255			55 187 45 765 43 3655
87	58	174			48 464 45 1305 44 3828
89	60	356	534	890	45 4005 184 of length 3
91	70	130			52 364 49 637 46 4186
93	62	186			51 527 48 1488 47 4371
95	60	380	570		60 228 57 285 50 950 48 4560
97	56	679	776		49 4753
99	66	198			90 110 63 231 55 495 54 594 51 1683 50 4950
101	202	303	606		51 5151

Index

2		
2/n	7, 39	
A		
abbacisten	31	
Abel	18	
additief systeem	23	
afgeleidde	17	
Afrika	32	
Agnesi	17	
Alexander de Grote	9	
Alexandrië	9	
algebra	10, 12, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 27, 29, 35, 38	
algoritme	12, 26	
Al-jabr	12	
Al-Jabra	13	
Al-Khayammi	12, 31	
Al-Khwarizmi	12, 13, 16, 29, 44	
Almagest	10, 37	
analytische meetkunde	35	
Appolonius	35	
Arabië	12, 23, 31, 32, 37	
Archimedes	26, 34	
Argand	36	
Aristoteles	9, 33	
Arithmetica	10	
Ars magna	15, 31, 36	
Aryabhata	11, 26	
astronomie	9, 10, 17, 18, 37, 38	
B		
Bagdad	11, 12, 13, 29, 32	
Berkeley	17	
Bernoulli	17	
Bhaskara I	11	
Bhaskara II	11	
Bólyai	19	
Bombelli	15, 16, 31, 36	
Bourbaki	20	
Brahmagupta	11	
Breken	4, 7, 10, 24	
C		
calculus	17, 18, 36	
Cambodja	11	
Cantor	18	
Cardano	15, 31, 36	
Cartesius	35	
Cauchy	18, 36	
Cavalieri	17	
China	5, 11	
Chongzhi	26	
Christendom	14	
Chudnovsky	26	
Collecties	10	
Combinatieleer	12	
complexe getallen	36	
computer	20, 21, 26	
context	8	
coördinatenmeetkunde	16, 35, 36	
coördinatenstelsel	35	
Copernicus'	10	
cosa	15, 27	
cossic art	27	
cossisten	15, 16, 17, 27	
cuneiform	22	
D		
de Chatelet	17	
De elementen	9, 10, 12, 20, 32, 33	
de Moivre	36	
De triangulis omnimodis	38	
decimaal	11	
decimale positie	22	
Dedekind	18	
del Ferro	15, 31	
derdegraads vergelijking	15, 31	
derdemachtswortel	11	
Descartes	16, 17, 27, 35, 36	
Diophantus	10, 16	
Dodecahedron	34	
driedimensionaal	14	
Duitsland	15, 17	
E		
École Polytechnique	18	
eenheidsfracties	24	
eerstegraads vergelijking	4, 5, 28	
eerstegraads vergelijkingen	28	
Egypte	4, 6, 22, 24, 28, 35	
Einstein	19	
Engeland	15, 17	
ENIAC	26	
Euclides	9, 10, 12, 32, 33, 34	
Euclidische meetkunde	12, 19	
Euler	13, 17, 26, 35, 36, 38	
Europa	11, 13, 23, 24, 37	
F		
false posits	28	
Fermat	13, 16, 35	
Ferrari	15, 31	
Fibonacci	13	
Fincke	38	
Fiore	31	
Fontana	15, 31	
Formalisten	20	
fotonica	17	
Fourier	19	
Frankrijk	16, 17, 18, 19	

Franse revolutie	18
------------------------	----

G

Galilei	17
Galois	18
Gauss	18, 19, 36
gebogen oppervlakken	17
Germain	19
getal Π	26
getal 0	11, 22, 36
getallenset	18
Getaltheorie	12
Girard	36
Gödel	20
Griekenland	9, 16, 23, 26, 32, 37

H

half-koord	11, 37
Hamilton	36
Harriot	17, 27
Hérigone	27
Hexahedron	34
hiëroglfen	6, 22
Hilbert	20
Hindu-Arabische	23
Hipparchus	37
Hui	24
Hume	27

I

ibn-Qurra	32, 44
ICM	19, 20
Icosahedron	34
Ierland	17
imaginaire getallen	36
incorrecte stellingen	28
India	11, 23, 37
International Congress of Mathematicians ...	19
Intuitionisten	20
irrationele getallen	9, 26
Islam	11, 12
Italië	15, 17, 31

J

jaib	37
Jezuïeten	14
jiba	37
jya-ardha	37

K

Kanada	26
kansberekening	17
kegels	35
Kepler	17, 34
Khayyam	12, 31
Klein	19
Knott	39, 44
kommagetallen	5, 25
koord	37

L

La géométrie	16, 35
Lagrange	17
Lambert	26
Laplace	17
Legendre	18
Leibniz	17
Liber abacci	13
Liber abbaci	15
Liber Quadratorum	13
Liu Hui	5, 24
Lobachevsky	19
loci	35

M

Maya's	22
mechanica	9, 17, 19
meervoudige variabelen	11
Mersenne	17
Mesopotamië	5, 7, 22, 24, 32
metrieke stelsel	18
Müller	38

N

negatieve getalen	36
negatieve getallen	11, 15, 31, 35, 36
Neumann	26
Newton	17
niet-Euclidische meetkunde	19
noemer	24
non-positioneel	6
Nunes	15

O

Octahedron	34
onuitdrukbaar	9
oplossingsformule	18
oppervlakte	9
Oresme	13, 35

P

Pacioli	13
Pappus	10
Peano	18
Pi 26	
Pisa	13, 15
Pitiscus	38
Plato	33, 34
Platonische vasten	34
Poincaré	19
polygonen	34
polyhedronen	34
Portugal	15
positioneel	11
positioneel stelsel	22
postulaat	9
Practica Geometriae	13
procenten	25
Ptolemaios	10, 26, 37
Pythagoras	9, 32, 33

R

Reorde	15, 27
regelmatige veelhoeken	34
Regiomontanus	38
rekenkunde	4, 5, 7, 10, 13, 15, 18
Renaissance	14, 27, 31
Rheticus	38
Rhind	39
Riemann	19
Robert of Chester	13
Roberval	38
Romeinen	11, 23, 35
Rusland	24

S

schriftgeleerde	5
secant	38
Seminaire Bourbaki	20
sexagesimale getallen	5, 7, 10, 22, 24
sferische meetkunde	10
Shanks	26
sinus	11, 36, 37, 38, 44
Sinustabel	14
Spanje	12, 13
Stampioen	16
stelling van Pythagoras	5, 32, 44
Stevin	25
Stifel	15, 27
Summa de aritmetica	13
Syntaxis	10
Syrië	11

T

tabel van $2/n$	7
tabel van inversen	8
tafels	7, 8
tangens	37, 38
Tartaglia	15, 31
teller	24
Tetrahedron	34
Thabit ibn-Qurra	44
Thales	33
The grounde of artes	15
The whetstone of witte	15
trigonometrie	11, 12, 14, 38
turven	22
Tweedegraads vergelijking	11

V

van Schooten	35
variabelen	16
vierdegraads vergelijking	15
Viète	16, 27, 35
vijfdegraads vergelijking	16
vrouwelijke wiskundigen	4, 17, 19

W

Wallis	35
Weierstrass	18
wortel	11, 25, 29, 31, 36

Z

Zwitserland	17
-------------	----

Afbeeldingen en figuren

Pagina	Omschrijving
6	Egyptisch rekenen
7, 8	Mesopotamisch rekenen
16	Stampioen's meetkundige bewijs voor tweedegraads vergelijkingen.
22	Hiëroglyfen voor getallen
29, 30	Al-Khwarizmi's meetkundige bewijs voor tweedegraads vergelijkingen.
32	Thabit ibn-Qurra's bewijs voor de stelling van Pythagoras. Uit D. Joyce, "Similar triangles and the Pythagorean theorem".
37	De relatie tussen sinus, hoek en "chord". Uit "Finding the radius with just the chord..."

Bronnen

W. Berlinghoff & F. Gouvêa, "Math through the ages", 2004, ISBN 0-88385-736-7

Hogeschool Utrecht, dictaat "Geschiedenis van de wiskunde", 2007

D. Joyce, "Similar triangles and the Pythagorean theorem", 2002

<http://www.clarku.edu/~djoyce/trig/geometry.html>

Math Help Forum, "Finding the radius with just the chord...", 2007

<http://www.mathhelpforum.com/math-help/trigonometry/>

R. Knott, "Egyptian fractions", 2008

<http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html>

D. Melville, "Mesopotamian math", 2004

<http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath>

De hiëroglyfen uit dit document zijn allen vervaardigd met behulp van JSesh, een gratis verkrijgbaar stuk software van Serge Rosmorduc.

De Babylonische "cuneiform" tekens zijn geleend van de website van D. Melville.