Dossieropdracht 9

Analyse 1 - Didactiek

Naam:	Thomas Sluyter
Nummer:	1018808
Jaar / Klas:	1e jaar “Docent Wiskunde”, deeltijd
Datum:	6 april, 2008

Samenvatting

Negatieve getallen zijn één van de eerste onderwerpen die op het middelbaar onderwijs als zeer ingewikkeld worden ervaren. Immers, hoe leg je een twaalfjarige uit dat er iets is dat kleiner is dan nul? En dat -3 echt groter is dan -5?

Er zijn minstens een dozijn verschillende manieren bedacht om leerlingen te introduceren tot het onderwerp van negatieve getallen. Wij gaan er mee aan de slag!

Dit document is onderdeel van mijn einddossier voor het vak "Analyse 1 – Didactiek". De overige documenten uit dit dossier zijn beschikbaar op mijn Sharepoint site: https://www.sharepoint.hu.nl/personal/1018808

Versie geschiedenis

Rev.	Datum	Door	Aanpassingen
01	22/03/2008	T. Sluyter	Eerste versie
01	Nvt	Nvt	Review
02			
02			Review

Inhoudsopgave

INLEIDING 4

De aanleiding 4
De opdracht 4

OPDRACHTEN A EN B 5

Opdracht A 5
Opdracht B 6
Reflectie op deze context 6

OPDRACHT C 7

In de les 7
Concreet 8
Schematisch 8
Abstract 9
Commentaar vanuit de klas 10

OPDRACHT D 11

AFBEELDINGEN EN FIGUREN 12

BRONNEN 12

Inleiding

De aanleiding

Eén van de eerste, echt ingewikkelde dingen die een wiskundedocent uit moet leggen op de middelbare school zijn negatieve getallen. Het klinkt voor veel mensen misschien triviaal, maar hoe leg je aan een kind uit dat er iets is dat kleiner is dan nul? Hoe leg je ze uit dat optellen met een negatief getal het zelfde is als aftrekken? Hoe leg je ze uit dat twee negatieve getallen vermenigvuldigd een positief getal worden?

Voor de eerstejaars studenten is dat dus een interessante zaak om de tanden in te zetten!

De opdracht

"Eén van de kenmerken van Realistisch wiskundeonderwijs is werken vanuit contexten:

A) Hoe zou je binnen de hierboven genoemde contexten betekenis kunnen geven aan de rekensom: 5 + (-3) = ?

B) Dezelfde vraag voor -10 – (-3) = ?

[...]

C) Je krijgt met je groepje één van deze contexten toebedeeld. De opdracht daarbij is: bedenk hoe je een instapgesprek (van ong. 15 min) inhoud zou geven bij een eerste les over het optellen en aftrekken van negatieve getallen, [...].

D) Lees het uitgereikte leesstuk "Min maal min is plus? Leg dat maar eens uit!". Hierin vind je 8 methodes om de vermenigvuldigingregel uit te leggen aan leerlingen. Kies er hiervan twee uit die jouw voorkeur hebben. Beargumenteer je keuze."

Bron: Hogeschool Utrecht, dictaat bij "Analyse 1 – Vakdidactiek", 2007

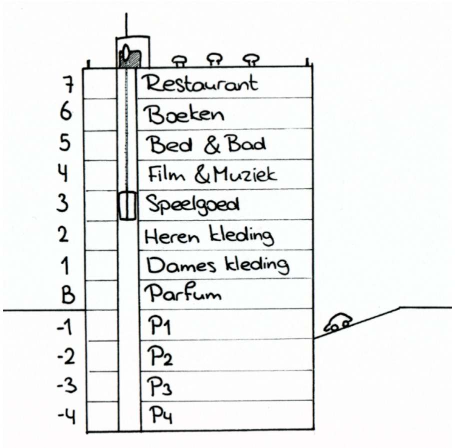
Opdrachten A en B

Het vinden van een geschikte context voor de uitleg van rekenen met negatieve getallen valt niet mee. Het uitleggen wat een negatief getal is en waar het zich bevindt op de getallenlijn is iets dat de meeste studenten nog wel zou lukken. Maar hoe gaan we om met optellen en aftrekken?

Eén van de methoden die ik heb gezien voor het uitleggen van optellen en aftrekken met negatieve getallen, heeft te maken met verdiepingen, of stappen op een lijn. De crux van de uitleg zit hem er in dat er twee bewegingen herkenbaar zijn:

1. Beweging ten opzichte van de 0, bijvoorbeeld verdiepingen boven en onder de grond. Deze beweging wordt aangegeven met het plus of min teken van de bewerking.
2. Beweging ten opzichte van "het positieve", bijvoorbeeld een beweging naar boven of naar beneden. Deze beweging wordt aangegeven met het (plus of) min teken voor een getal. In wezen komt dit neer op een bevestiging of ontkenning van de vorig beweging.

Dit voorbeeld met verdiepingen heb ik ook gebruikt tijdens een les die ik heb gegeven voor "Vakdidactiek 2". Daarbij heb ik de hier naast vertoonde tekening gebruikt voor een aantal simpele rekenopgaven. De leerlingen werden daarbij gevraagd om een route door het warenhuis uit te stippelen.



Opdracht A

Ga ik met de context van mijn warenhuis aan de slag, dan zou ik de som "5 + (-3)" kunnen omschrijven als: "Je hebt voor de verjaardag van je broer een No Doubt dekbedovertrek gekocht. Nu wil je nog een grappig paar boxer shorts voor hem kopen. Je moet nu ___ verdiepingen naar _____". Of als "Je hebt voor de verjaardag van je broer een No Doubt dekbedovertrek gekocht. Je hebt met je vader afgesproken elkaar drie verdiepingen lager te ontmoeten. Waar is dit?"

Kijken we naar de twee eerder genoemde bewegingen, dan herkennen wij het volgende:

$$5 + (-3) = \ldots$$

A B C

A. We beginnen 5 verdiepingen boven 0.
B. We gaan omhoog.
C. We gaan -3 omhoog, wat betekent dat we 3 omlaag gaan. De min in het geval van "-3" is een ontkenning van de beweging omhoog.

Opdracht B

De som "-10 – (-3)" wordt al wat ingewikkelder om te beschrijven. Sowieso gaat mijn tekening maar tot -4, dus ik zal de som even aanpassen naar "-4 – (-3)".

Dit vertaalt zich naar:

$$-4 - (-3) = \ldots$$

A B C

A. We beginnen 4 verdiepingen onder 0.
B. We gaan omlaag.
C. We gaan -3 omlaag, wat betekent dat we 3 omhoog gaan. De min in het geval van "-3" is een ontkenning van de beweging omlaag.

Reflectie op deze context

Ik moet eerlijk bekennen dat deze context enigszins "rammelt". Zij valt of staat met het begrip van de "ontkenning" van een beweging, waardoor omhoog verwordt tot omlaag en vice versa.

Daarnaast wordt het de leerling niet duidelijk waarom bijvoorbeeld de "-4" bij opdracht B geen ontkenning is, maar een beginpunt. Op deze manier scheppen we haast drie betekenissen voor het min teken:

1. De min als negatief beginpunt op de getallenlijn.
2. De min als teken voor een aftreksom.
3. De min als teken voor een omgekeerde beweging.

Ik denk dat dit te verwarrend wordt voor de leerlingen.

Opdracht C

Tijden de les (lesweek 5, blok 2) kreeg mijn groep de contexten IVa en IVb toebedeeld. Dit is een nogal uitgebreide context die werkt met twee getallenlijnen tegelijk: hoogte en temperatuur. Om het een en ander nog wat ingewikkelder te maken worden beide lijnen met elkaar verbonden.

In de les

In de les zijn wij gekomen tot de volgende opbouw van onze uitleg. We zijn helaas niet tot een unaniem besluit gekomen, omdat niet iedereen zich kon vinden in de uitleg. Misschien dat dit alleen al aangeeft dat deze context niet heel erg geschikt is.

Tijdens ons groepsoverleg heb ik de volgende notities gemaakt:

"Floris ziet meteen al een tegenstrijdigheid: ga je omhoog, dan gaat de temperatuur omlaag. En vice versa. [...] Men is het eens met Floris dat het combineren van omhoog-omlaag erg verwarrend kan zijn voor de kinderen. Daarnaast worden opgaven G en H helemaal verwarrend omdat je daar tijden en hoogtes moet combineren.

[..]

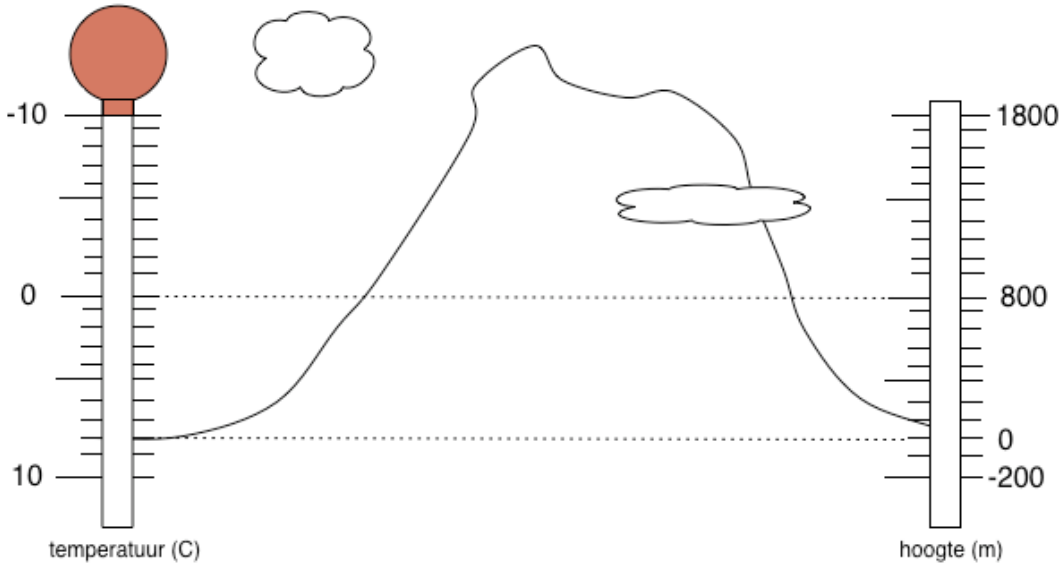
- *Opening*
- *Inleiding: wie is er in de bergen geweest. Wat is je op gevallen bij het omhoog gaan?*
  - *De clou: als je omhoog gaat, wordt het kouder.*
  - *Maak een tekening, met een kleurenbalk voor de temperatuur.*
- *Begin met de inleiding van de som -> vuistregels.*
  - *Pas dit in een verhaaltje over in je zwembroek de berg oplopen. In het dal is het warm, op de berg wordt het koud.*
- *Ga met de kinderen aan de slag met sommen A t/m C.*
  - *Ga met de groep de getallen invullen op de tekening. Dit gebeurt klassikaal.*
- *Zelfwerkzaamheid: opgaven D en E.*
  - *De leerlingen vullen zelf de laatste twee temperaturen aan.*
- *Schematiseren kunnen we nu doen met een trappetje.*
  - *Het nadeel daarvan is alsnog dat je omhoog gaat, maar tegelijk aftrekt. Dat gaat tegen de assenstelsels in die ze net hebben geleerd.*

Er breekt een discussie los. Floris en de rest vinden het trappetje nog veel te concreet. Floris wil graag meer naar een formule toe. [...]"

Bron: T. Sluyter, aantekeningen lesweek 5 "Analyse 1 – Vakdidactiek", 2007

Concreet

Voor de concrete uitleg zouden we gebruik maken van tekeningen die aansluiten bij het boek. De onderstaande tekening heb ik gemaakt aan de hand van schetsen die we tijdens de les hebben gemaakt.



De inleiding uit ons lesplan maakt gebruik van deze tekening en introduceert de klas tot de context en het onderwerp. De punten die we aan zouden stippen zijn achtereenvolgend:

- Ben je wel eens op vakantie geweest in de bergen?
- In het dal was het lekker warm, maar op de berg was het best koud.
- We beginnen op een lage hoogte, met een warme temperatuur en eindigen op hoge hoogte, met een lage temperatuur.

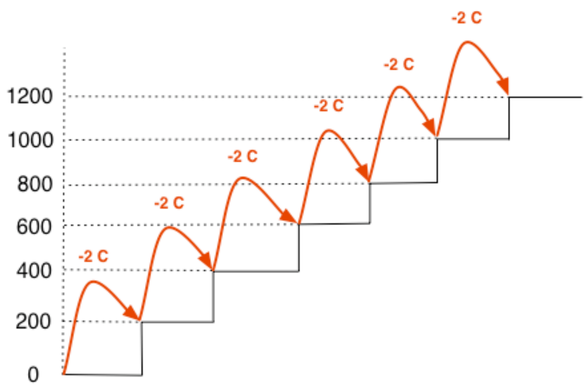
Daarna gaan we over tot de werkelijke stof.

- Opdracht A t/m C worden met behulp van de tekening doorlopen. Dit gebeurt klassikaal, zodat iedereen mee denkt.
- Opgaven D en E worden door de leerlingen zelf gemaakt, met indien nodig overleg in koppels.

Vanaf dit punt gaan we over tot de schematische aanpak.

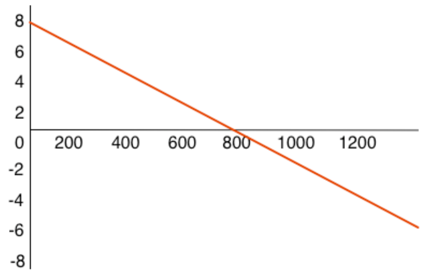
Schematisch

Dit is het punt waarop onenigheid ontstond binnen onze groep. We konden geen goede manier vinden om de context schematisch weer te geven. We hebben uiteindelijk gekozen voor een model met een trapje, alhoewel een aantal mensen vonden dat dit nog steeds te concreet was.



En ook op dit punt keert weer de "omhoog is omlaag" paradox terug.

Mijn inziens was het beter geweest als we een grafiek hadden gebruikt om het een en ander te illustreren. De leerlingen hebben immers in het begin van de brugklas al kennis gemaakt met grafieken, dus het lezen van een grafiek moet geen probleem zijn.



Een grafiek zou precies de zelfde informatie laten zien als het trappetje, maar in een andere context. Mijn hoop is dat een dergelijke verandering al een goede stap richting de abstrahering is.

Abstract

Hier komt het grote nadeel van deze context naar voren. De voorbeeld pagina's maken geen gebruik van sommetjes, waardoor we niet volledig door kunnen gaan met het abstracte gedeelte. De opgaven maken gebruik van tabellen die moeten worden ingevuld, waarbij vooral gebruik wordt gemaakt van stappen op een getallenlijn. Het zijn geen echte rekenopgaven.

Het is natuurlijk mogelijk om zelf een aantal sommen te verzinnen.

Bijvoorbeeld: Je bevindt je op 1200 meter hoogte, waar het -4 graden is. Je daalt nu af naar 400 meter hoogte, waardoor het 8 graden warmer wordt. Hoe warm is het nu?

- Met behulp van het concrete voorbeeld kunnen de kinderen beide getallenlijnen naast elkaar leggen om tot het antwoord te komen.
- Met behulp van de schematische weergave kunnen de leerlingen het trapje aflopen van 1200 naar 400 meter hoogte. Zo komen zij in 4 stappen van +2 (of 8 stappen van +1) uit bij +4 C.
- Trekken we het naar het abstracte, dan zien de leerlingen de volgende som: -4 + (4 x 2) = -4 + 8 = 4.

Commentaar vanuit de klas

Het mocht in de les duidelijk zijn dat wij er als groep nog niet helemaal uit waren gekomen. Vanuit de klas kwam dan ook enig commentaar op onze presentatie.

De volgende punten werden gehoord:

- Er wordt gevraagd of we nog hebben gekeken naar vermenigvuldigen. Dat hadden we inderdaad geprobeerd, maar we konden geen correcte analogie verzinnen voor onze context.
- De klas is het met ons eens dat deze context niet heel geschikt is. De meeste van hen vinden de context zelfs ronduit slecht. Hij is te ingewikkeld.
- Men is het eens dat dit een context is die beter kan worden gebruikt wanneer de hele klas de negatieve getallen een beetje in de vingers heeft.

De docent heeft ons uitgelegd dat:

- Het schematiseren bestaat uit de thermometer.
- Het abstracte bestaat uit kale rekensommen.

We waren dus te ingewikkeld aan het denken. Dit zou overigens ook suggereren dat mijn grafiek (zie het kopje Schematisch) ook ongeschikt zou zijn als schematisatie.

Opdracht D

Uit de acht verschillende aanpakken die in het artikel worden gepresenteerd zijn er een aantal die mij zeer aanspreken, en eentje die mij nogal tegen staat.

Nr	Aanpak	Mijn mening
1	Definitie	Recht toe, recht aan. Geen onderbouwing.
2	Fysisch model	Vereist veel redenering.
3	Geconstrueerd fysisch	Geeft geen beeld van één geheel.
4	Patroonvoortzetting	Gemakkelijk in gebruik, maar incompleet.
5	Permanentie	Elegant, maar van hoog niveau.
6	Algebraïsch-meetkundig	Ook elegant, maar vereist voorkennis.
7	Deductie	Elegant, maar van hoog niveau.
8	Getallenparen	Te confuus. Deze aanpak bevalt mij niet.

Aanpakken 4 (patroonvoortzetting) en 6 (algebraïsch-meetkundig) bevallen mij zeer. Ook aanpakken 5 en 7 spreken mij aan, maar deze vereisen duidelijk een hoger niveau van inzicht.

De aanpak met patroonvoortzetting is erg gemakkelijk te demonstreren in de klas. De uitbreiding van de welbekende vermenigvuldigingstafels met negatieve getallen is een simpele en doeltreffende oplossing. Voor de leerlingen zal het weinig moeite vereisen om de tafels met min maal plus (en omgekeerd) te maken. Helaas komt in dit geval de overgang naar "min maal min is plus" alsnog redelijk onverwacht. Er is geen duidelijk bewijs dat het echt zo is.

Dit missende bewijs is bij de algebraïsch-meetkundig aanpak wel degelijk aanwezig en aantoonbaar. Met een tweetal grafieken is het bewijs geleverd dat "min maal min is plus" en bovendien zijn alle andere vermenigvuldigingsregels ook geïllustreerd. Het enige nadeel aan deze aanpak is dat de vereiste voorkennis (formules en variabelen) niet in alle gevallen aanwezig zal zijn. Veel boeken behandelen deze stof pas na het hoofdstuk over negatieve getallen.

De aanpak met permanentiewetten verraste mij! Ik was erg onder de indruk van de elegantie van de oplossing, die vlekkeloos alle rekenregels illustreert en bewijst. Prachtig! Eén van de nadelen aan deze methode is echter dat zij een hoog niveau van inzicht vereist. Zij zal daarom niet inzetbaar zijn bij de meeste VMBO klassen en bij sommige HAVO klassen.

Dit bezwaar geldt in mindere mate voor de deducerende aanpak, die zo mogelijk nog eleganter is in zijn eenvoud.

Afbeeldingen en figuren

Afb.	Pag.	Herkomst
1	5	T. Sluyter, Warenhuis. 2008
2	8	T. Sluyter, Berg met hoogte- en thermometer. 2008
3	9	T. Sluyter, Schematisering van de berg context. 2008
4	9	T. Sluyter, Schematisering van de berg context. 2008

Bronnen

Hogeschool Utrecht, dictaat bij "Analyse 1 – Vakdidactiek", 2007