Dossieropdracht 6

Analyse 1 - Didactiek

Naam: Thomas Sluyter
Nummer: 1018808
Jaar / Klas: 1e jaar “Docent Wiskunde”, deeltijd

Datum: 27 maart, 2008

Samenvatting

Denkschema's bepalen hoe wij naar de wereld kijken. Ze bepalen hoe wij informatie interpreteren. Zij bepalen hoe wij omgaan met verschillende situaties.

Denkschema's zijn niet alleen een fenomeen dat betrekking heeft op sociale interacties. Je treft ze overal in het leerproces aan, omdat elke leerling voor zich een beeld opbouwt over "de juiste aanpak".

Dit document is onderdeel van mijn einddossier voor het vak "Analyse 1 – Didactiek". De overige documenten uit dit dossier zijn beschikbaar op mijn Sharepoint site: https://www.sharepoint.hu.nl/personal/1018808

Versie geschiedenis

Rev.	Datum	Door	Aanpassingen
01	03/12/2007	T. Sluyter	Eerste versie
01	Nvt	Nvt	Review
02	05/12/2007	T. Sluyter	Grammaticale correcties.
02	Nvt	Nvt	Review
03	26/03/2008	T. Sluyter	Aanpassing na review docent.
03	Nvt	Nvt	Review

Inhoudsopgave

Inleiding

De aanleiding

Om leerlingen goed bij te kunnen staan in hun leerproces, moeten wij als docenten in staat kunnen zijn om foutanalyses uit te voeren. We moeten herkennen op welke punten een leerling de fout in gaat en waarom hij die fout maakt.

Deze dossieropdracht is bedoeld als een eerste oefening in het herkennen van rekenfouten.

De opdracht

De student krijgt een vijftal afzonderlijke opdrachten voorgeschoteld. Bij elke opdracht moet hij een analyse maken van de denkfouten die hij opmerkt.

Elke afzonderlijke opdracht is opgenomen in een eigen hoofdstuk. De opdrachten zelf zijn daar ook na te lezen.

Denkschema's

Voordat we aan de slag gaan met het verkennen van wiskundige denkschema's is het verstandig om eerst het concept zelf eens te verkennen. De definitie die in het dictaat bij dit vak wordt gegeven is immers erg interessant, maar is zij ook compleet?

> *"Denkschema's: Bij nieuwe problemen gebruik je gedachteschema's van vroeger. Je hersenen denken iets te herkennen en het schema wikkelt zich af. Denkschema's [...] zijn samenhangende ketens van gedachten, het een volgt op het ander. Hierbij kan best eens wat mislopen: hetzij bij de herkenning, hetzij bij de afwikkeling van zo'n gedachteketen."*

Bron: Hand-outs bij "Analyse 1 - Vakdidactiek"

De psychologische insteek

Het voorgaande citaat geeft een zeer globale beschrijving van hoe denkschema's werken. Dat onze psyche vergeven is van deze schema's is echter niet meteen duidelijk.

Al bij de oude Grieken geloofde Epictetus dat situaties leiden tot vervelende gevoelens, niet omdat zij gebeuren, maar vanwege de manier waarop men er naar kijkt. Iemand met een positieve instelling zal heel anders kijken naar een gebeurtenis, dan iemand die zich negatief opstelt.

Het totaal van al je denkschema's bepalen de manier waarop je de wereld waarneemt (de spreekwoordelijke gekleurde bril). Deze denkschema's zijn echter niet statisch, maar kunnen worden aangepast.

De pubers die wij in het onderwijs tegen zullen komen zullen veel bezig zijn met denkschema's die betrekking hebben op hun zelfbeeld. Zij bevinden zich immers in de vormende fase van hun identiteit, waarin zij nog hard op zoek zijn naar zichzelf.

De denkschema's die van toepassing zijn op henzelf zullen constant aan verandering onderhevig zijn. Niet alleen door interne invloeden, maar ook door bronnen van buitenaf. Immers, welke tiener trekt het zich nu niet aan als de klasgenoten hem/haar lelijk noemen? Dergelijke invloeden kunnen blijvende gevolgen hebben voor het kind. Door middel van "cognitieve therapie"[1] kan men later nog proberen de denkschema's te corrigeren, maar voorkomen is natuurlijk beter dan verhelpen.

[1] Aaron T. Beck is één van de grondleggers van de moderne cognitieve therapie. Lees bijvoorbeeld zijn boeken "Depression: Causes and Treatment" (1967) en "Cognitive Therapy and the Emotional Disorders" (1976).

Vele soorten denkfouten

Het concept "denkfout" wordt in de psychologie gedefinieerd als een verkeerde interpretatie van de situatie, aan de hand van het eigen denkschema. Het is dus niet zo dat een denkschema verkeerd wordt afgehandeld, maar dat de fout wordt veroorzaakt door een selectieve interpretatie van de geboden informatie.

Enkele voorbeelden van denkfouten die we onderkennen:

- *Absoluut dichotoom denken (zwart-witdenken)*
- *Emotioneel redeneren*
- *Personalisatie*
- *Overgeneralisatie of overhaaste generalisatie*
- *Selectieve abstractie*
- *Onderwaardering, onderschatting of overschatting*

Bron: http://nl.wikipedia.org/wiki/Denkfout

Denkschema's in het onderwijs

Uit het voorgaande lijstje zijn een aantal denkfouten te noemen die docenten ook tegen kunnen komen in het leerproces van het kind.

In het geval van het valse dilemma (zwart-wit denken) zal een kind een aantal mogelijke antwoorden voor een probleem erkennen. Hij zal echter niet inzien dat het ene antwoord het andere niet uitsluit. In zijn ogen zal maar één van de antwoorden mogelijk kunnen zijn.

Personalisatie valt ook te omschrijven als "valse attributie", een term die de student ook bij het vak "Vakdidactiek 2" tegen zal komen. Neem het voorbeeld van de docent die zijn dag niet heeft en die dus chagrijnig is. De leerling zou dat kunnen interpreteren als bewijs dat de docent hem niet mag, omdat hij zo bars reageert.

Overhaaste generalisatie doet zich bijvoorbeeld voor wanneer een leerling zich voorneemt dat het niet meer goed komt, wanneer hij een onvoldoende heeft gehaald.

Al met al zijn er een heleboel denkfouten die kunnen leiden tot vervelende, sociale situaties. Het zal zwaar zijn voor de docent, maar hij zal toch beducht moeten zijn op dergelijke situaties. Eigenlijk zal hij zich altijd bewust moeten zijn van zijn acties en welke reactie die teweeg kan brengen bij de leerling.

Dat wil niet zeggen dat de docent alles kan voorzien. Immers, de gedachteprocessen en –schema's bevinden zich in het hoofd van de leerling. Ik denk dat het daarom belangrijk is om te kijken naar de reacties die de leerlingen vertonen. Op dat soort momenten is het misschien nog mogelijk om bij te sturen.

Denkschema’s in de wiskunde

Denkschema’s bestaan niet alleen voor sociale interacties, of voor psychologische aangelegenheden. Op de zelfde manier dat leerlingen automatismen opbouwen voor hun blik op de wereld, bouwen zij ook automatismen voor rekenen, talen en andere aangeleerde vaardigheden.

In vorige dossieropdrachten voor “Analyse 1 – Didactiek” hebben we al gekeken naar algoritmes en verschillende trucs om wiskunde gemakkelijker aan te leren. Wanneer deze methoden succesvol worden aangeleerd kan men zeggen dat de leerling nieuwe gedachteschema’s heeft ontwikkeld.

Dat het gebruik van deze schema’s ook fout kan gaan ligt voor de hand. Aan de ene kant kan een leerling het verkeerde schema toepassen (herkenningsfout). Aan de andere kant kan het ook zijn dat hij het schema verkeerd heeft aangeleerd (afwikkelingsfout).

In de volgende hoofdstukken verkennen we een aantal sommen, met de bijbehorende schema’s.

Opdracht 1

Aanvankelijk heb ik versie 2 van dit document ingeleverd bij de docent. Hij liet mij al gauw weten niet tevreden te zijn over de invulling die ik had gegeven aan opdracht 1. Hier onder staan zowel de originele, als mijn nieuwe versie van mijn antwoord.

De opdracht

> *"Je gaat van A naar B met een gemiddelde snelheid van 60 km/u en van B naar A met 90 km/u. Wat is je gemiddelde snelheid heen en terug? Leg verband met denkschema's."*

Bron: Hand-outs bij "Analyse 1 – Didactiek"

Analyse (eerste versie)

"Ah! De gemiddelde snelheid! Dat bereken je door beide snelheden bij elkaar op te tellen, en dan door te delen door 2!" Dat is de eerste gedachte die door mijn hoofd schoot. De kans is groot dat de meeste leerlingen ook zo'n reactie zouden hebben, mogelijk na een initiële reactie als "Wat was het gemiddelde ook al weer?".

Dat die methode niet de juiste is, wordt duidelijk wanneer je iets langer nadenkt over de opgave zelf. Want wat is er nog meer belangrijk bij het berekenen van een gemiddelde snelheid? Juist, de tijdsduur van elke etappe! Immers, de terugweg die met een snelheid gereisd wordt die een factor 1,5 hoger is dan op de heenweg, zal korter duren.

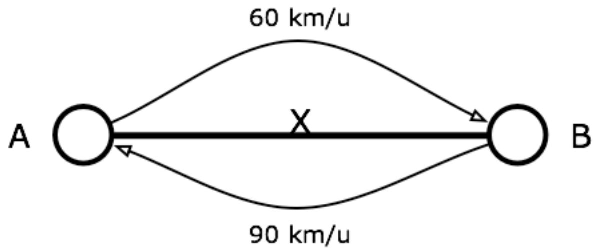
Het correcte antwoord op deze vraag is dus dat zij niet te beantwoorden is. In elk geval niet zolang men niet weet hoever A en B uit elkaar liggen.

Analyse (tweede versie)

Het feit dat het goede antwoord niet ligt in "het totaal delen door twee" staat als een huis. Ik heb nog eens met een schone lei naar dit probleem gekeken en ik moet eerlijk bekennen dat ik me schaam voor hoe moeilijk ik de opgave vond. Ik keek mij nog steeds kapot op het feit dat zowel de afstand als de gereisde tijd onbekend zijn.

Dit is dan meteen een interessant voorbeeld van hoe denkschema's iemand in de weg kunnen zitten. Ik heb altijd al moeite gehad met logisch inzicht en het deduceren/beredeneren van een oplossing. Ik had bij het maken van deze som constant het gevoel dat het antwoord binnen handbereik lag, maar dat het steeds net buiten mijn gezichtsveld lag.

Ik ben uiteindelijk toch tot de juiste uitkomst gekomen. Met behulp van een aantal vrienden ben ik zelfs tot meerdere oplossingen gekomen. Dit helpt mij bij het oefenen van mijn inzichtsvermogen.



Bekende feiten

V_{heen} = 60 km/u
V_{terug} = 90 km/u
$D_{heen} = D_{terug}$ = X

Oplossing 1:

$$\begin{aligned} X &= V \cdot t \\ X &= 60 \cdot t \\ X &= v_{gem} \cdot \frac{5}{6} \cdot t \\ \Rightarrow 60 \cdot t &= \frac{5}{6} \cdot t \cdot v_{gem} \\ \frac{60 \cdot 6}{5} \cdot t &= t \cdot v_{gem} \\ \Rightarrow v_{gem} &= \frac{60 \cdot 6}{5} \\ &= \frac{360}{5} \\ &= 72 \end{aligned}$$

Je reist aanvankelijk afstand X in Y uur. Daarna reis je 2/3Y uur dezelfde afstand terug. Daaruit volgt dat je 5Y/3 uur doet over de afstand 2X. Gemiddeld doe je over de afstand X dus 5Y/6 uur.

De uiteindelijke oplossing lijkt kinderlijk simpel. Zoals ik al eerder zei schaam ik me er een beetje voor dat ik de som zo moeilijk vond.

Oplossing 2:

$$\begin{aligned} t_{heen} &= \frac{3}{5} \cdot t_{totaal} \\ t_{terug} &= \frac{2}{5} \cdot t_{totaal} \\ \Rightarrow v_{gem} &= (60 \cdot \frac{3}{5}) + (90 \cdot \frac{2}{5}) \\ &= (60 \cdot 0,6) + (90 \cdot 0,4) \\ &= 36 + 36 = 72 km/u \end{aligned}$$

Kijken we naar de verhouding van de tijden waarin we een bepaalde snelheid reizen, dan komen we uit op deze berekening.

Oplossing 3:

$$
\begin{aligned}
d_{heen} &= 60 \cdot t \\
d_{terug} &= 90 \cdot \frac{2}{3}t \\
\Rightarrow v_{gem} &= d/t \\
&= \frac{60 \cdot t + (90 \cdot \frac{2}{3}t)}{t + \frac{2}{3}t} \\
&= \frac{60 + (90 \cdot \frac{2}{3})}{1 + \frac{2}{3}} \\
&= \frac{120}{\frac{5}{3}} \\
&= 72
\end{aligned}
$$

Nog een andere aanpak. Je rijdt t uur om afstand X af te leggen bij 60 km/u. De afstand is 60Y. Voor de terugweg heb je twee-derde Y nodig en de afstand is [90 * (2Y/3)]. Dit wisten we natuurlijk al. Maar nu maken we er een iets andere som van.

We kunnen dus concluderen dat ik er aanvankelijk goed naast zat. Ik keek mij blind op een logisch probleem waar ik geen uitweg in zag. Uiteindelijk heb ik het probleem moeten laten bezinken voordat ik het licht zag. Later voorzagen vrienden mij van nog twee oplossingen.

Opdracht 2

De opdracht

"Een leerling schrijft: sin x + sin 2x = sin 3x.
- *Wat is er aan de hand, in termen van denkschema's?*
- *Wat zou je zoal kunnen doen om deze leerling verder te helpen?"*

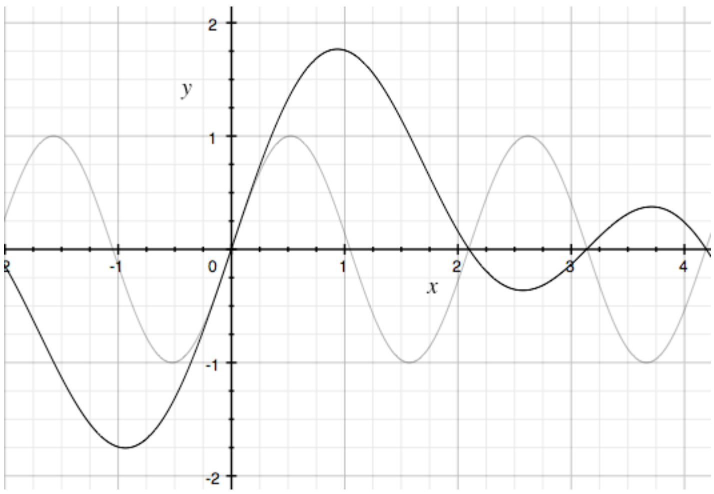
Bron: Hand-outs bij "Analyse 1 – Didactiek"

Analyse

Het ligt redelijk voor de hand waar het bij deze leerling fout gaat. Waar hij "sin" herkent als een soort van vermenigvuldigingsfactor, zou hij "sin" eigenlijk moeten herkennen als de functie "sinus". In dit geval denkt de leerling dus dat hij klakkeloos "sin(x+2x)" mag doen.

Ik denk zelf dat de volgende aanpak een goede zou zijn.

1. Vraag de leerling de som nog eens te maken. Vraag de leerling echter om zijn stappen te verbaliseren. Door de leerling zijn gedachten uit te laten spreken kan er vaak al een klik plaats vinden.
2. Blijft de klik uit, dan is het een optie om nog eens de rekenregels voor de sinus functie te herhalen. Vraag de leerling wat die regels ook alweer waren. Zo nodig mag hij daar ook zijn formulekaart bij gebruiken.
3. Blijft de klik helemaal uit, dan is het misschien verstandig om de leerling aan te laten tonen dat zijn antwoord in elk geval onmogelijk is. Dat kan door de leerling een schets te laten maken van "sin(x) + sin(2x), gevolgd door een schets van sin(3x). Op dat moment moet het voor de leerling mogelijk zijn om zijn antwoord uit te sluiten. Dit zou een opstap zijn om nogmaals stappen twee en één uit te voeren.



Figuur 1: {sin(x)+sin(2x)} -vs- sin(3x)

Opdracht 3

De opdracht

> *"Geef een voorbeeld van een situatie die je kortgeleden meemaakte, waarin jijzelf 'in het verkeerde schema' zat."*

Bron: Hand-outs bij "Analyse 1 – Didactiek"

Analyse

Eén van mijn vaste taken op kantoor is om 's ochtends de back-up tapes[2] van onze servers te verwisselen. Dat is een zeer routinematige taak, die in een aantal afzonderlijke stappen is op te delen. De correcte afhandeling van deze stappen loopt ruwweg als volgt.

1. Vertel de server om zijn gebruikte tapes uit te spuwen.
2. Verzamel de gebruikte tapes in de kluis.
3. Plaats nieuwe tapes in de server.
4. Laat de server de nieuwe tapes in slikken.
5. Maak de nieuwe tapes klaar voor gebruik.

Vanochtend was het een nogal hectische ochtend, waardoor ik tussen stappen drie en vier werd gestoord. Toen ik mijn gedachten weer op de back-ups richtte was ik in de veronderstelling dat ik taak vier al had gedaan. Immers, de tapes zaten al in de server. Ik ben meteen doorgegaan met taak vijf, wat in een foutsituatie eindigde.

[2] Om computergegevens te beveiligen tegen calamiteiten of ongelukken, wordt een zogenaamde back-up gemaakt. Deze kopie van de gegevens wordt vaak op een magnetisch medium, genaamd "tape" (letterlijk "band") opgeslagen. Wanneer deze tapes vol zijn, moeten zij worden vervangen met lege tapes.

Opdracht 4

De opdracht

> *"Een leraar legt uit: '3a + 5a = 8a, want drie appels en vijf appels is acht appels'. Dit is voor leerlingen heel herkenbaar, maar het is wel een onhandig denkschema. Het heeft op korte termijn succes, maar moet later weer worden afgeleerd worden wanneer opdrachten als '2a x 3a = $6a^2$' aan de orde komen.*
>
> *Hoe zou je deze optelling anders uit kunnen leggen, zodat het aangeleerde denkschema zich wèl leent voor latere uitbreiding?"*

Bron: Hand-outs bij "Analyse 1 – Didactiek"

Analyse

De crux in deze zaak is juist de essentie van het rekenen met symbolen. We gebruiken letters in onze formules wanneer we niet precies weten met welke hoeveelheden we uiteindelijk gaan werken.

Zo is het ook met de letter A in het voorgaande voorbeeld. De docent maakt een fout door A gelijk te stellen aan één appel. Bij de optel- en aftreksommen gaat dat nog goed, maar bij vermenigvuldiging en deling gaan we de mist in.

Wat de docent had moeten doen is A een symbool maken voor een onbekende kwantiteit objecten. Eén van de veelgehoorde voorbeelden op school is dat we A gelijk stellen aan een zakje knikkers. We weten niet hoeveel knikkers er in een zakje zitten, maar we weten wel dat elk zakje A evenveel knikkers bevat.

Op die manier is het uitleggen van een som als "2a x 3a = $6a^2$" wel goed te doen. We kunnen de som ontleden naar "2 x a x 3 x a = 6 x a x a = $6a^2$ ".

Opdracht 5

De opdracht

> *"Kies uit de rekenfouten [op de volgende pagina's] een paar voorbeelden;*
> - *Wat is je diagnose van de rekenfout?*
> - *Bespreek hoe je de leerling verder zou kunnen helpen om de fout, die je in het denkschema vermoedt, op te heffen.*
> - *Wat zou er aan het voorafgaand leren van de leerling verbeterd kunnen worden om de kans op dergelijke fouten te verminderen?"*

Bron: Hand-outs bij "Analyse 1 – Didactiek"

Een aantal voorbeelden

<u>Opgave 1a</u>

De leerling stelt dat: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{3}{9}$

De leerling heeft in dit geval de regel van het gelijknamig-maken vergeten. Hij heeft bij deze som de cijfers boven en onder de streep simpelweg bij elkaar opgeteld.

In dit geval is het een kwestie van de rekenregels met breuken nogmaals met de leerling bespreken. Er van uitgaande dat deze stof net is besproken, dan kan dat gewoon tijdens de les. Zijn de breuken echter al lang geleden behandeld, dan is er mogelijk sprake van grotere rekenproblemen, waardoor een intensievere coaching mogelijk nodig is.

<u>Opgave 3b</u>

De leerling stelt dat: $1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=1\frac{6}{47}$

Ik denk dat de leerling het optellen van breuken op zich wel door heeft. Ik denk alleen dat hij heeft geprobeerd de som teveel uit zijn hoofd te maken, zonder daar tussenstappen bij op te schrijven. Had hij dat gedaan, dan had hij het volgende gezien.

$$1\frac{1}{4}\cdot 1\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{4}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{25}{16}\cdot\frac{2}{3}=\frac{50}{48}=1\frac{1}{24}$$

Omdat het hier om een slordigheidfout lijkt te gaan, lijkt het mij verstandig om de leerling nog eens te vragen de sommen helemaal uit te schrijven. Zo oefent hij het rekenen, voordat hij alles uit het hoofd probeert te berekenen.

Opgave 4 en 5 (procenten)

In het geval van opgaven lijkt het er op dat de leerling het concept van procenten niet heeft begrepen. Bij elke prijsverhoging met X % vermenigvuldigt hij namelijk het originele bedrag met X.

Dat kan twee dingen betekenen:
- De leerling vergeet stelselmatig de deling door honderd uit te voeren.
- De leerling denkt dat procenten het zelfde zijn als vermenigvuldigingen.

In het eerste geval zou een bijsturing, met extra oefensommen voldoende moeten zijn voor een beter resultaat. We moeten de leerling er van doordringen waarom het ook al weer een "procent" heet.

In het tweede geval denk ik dat de hele introductie over procenten gewoon niet is aangekomen. Het lijkt mij verstandig om de leerling terzijde te nemen om de stof nog eens uit te leggen.

Opgave 4a (BTW)

In dit geval past de leerling de verhoudingstabel niet op de juiste manier toe. Hij heeft de juiste getallen wel herkend (100% voor het bedrag, 17,5% voor de BTW), maar hij haalt ze bij de som danig door elkaar. Daarnaast is het mij een raadsel hoe de beste knaap komt aan "1,75 x 17,5 = 306,25".

Het lijkt mij zeer verstandig om de leerling de som over te laten doen, waarbij hij al zijn gedachtestappen verbaliseert. De docent zal bij de stappen waar het fout gaat (in dit geval het invullen van de juiste percentages in de verhoudingtabel) sturende vragen moeten stellen. "Waarom is dat zo?" en "Wat vermenigvuldig je hier nu eigenlijk?" bijvoorbeeld.

Afbeeldingen en figuren

Bronnen

R.B. Nauta, “Schemagerichte cognitieve therapie”,

“De Natuur Uw Arts” 26e jaargang, Nr. 156, bladzijde 6

http://www.natuurlijk-welzijn.org/artikel/Schema156.html

Wikipedia, http://www.wikipedia.org

Oa entries over: Verschillende soorten denkfouten (vals dilemma, personalisatie, selectieve abstractie, enz), cognitieve therapie, Aaron T. Beck, Alber Ellis.

Ars Technica Open Forum, “Funny: how teaching math has changed...”

http://episteme.arstechnica.com/eve/forums/a/tpc/f/34709834/m/190009821931