Dossier opdracht 1

Analyse 1 – Vakdidactiek

Naam: Thomas Sluyter
Nummer: 1018808
Jaar / Klas: 1e jaar "Docent Wiskunde", deeltijd
Datum: 8 december, 2007

Samenvatting

Het leren van zoiets alledaags als rekenen is ingewikkelder dan men denkt. De stappen die nodig zijn om zoiets simpels als een optelsom uit te voeren zijn bij de meeste volwassenen al lang weg gezakt: het is een automatisme geworden.

Voor dossieropdracht 1 gaat de student ervaren hoe het is om opnieuw te leren rekenen.

Dit document is onderdeel van mijn einddossier voor het vak “Analyse 1 – Vakdidactiek”. De overige documenten uit dit dossier zijn beschikbaar op mijn Sharepoint site: https://www.sharepoint.hu.nl/personal/1018808

Versie geschiedenis

Rev.	Datum	Door	Aanpassingen
01	16/11/2007	T. Sluyter	Eerste versie
01	Nvt	Nvt	Review
02	18/11/2007	T. Sluyter	Grammaticale correcties
02	??/11/2007	T. Rem	Review
03	25/11/2007	T. Sluyter	Uitbreiding na klassengesprek. Aanpassingen na review. Uitwerkingen in bijlage. Toelichting gecijferdheid.
03	Nvt	Nvt	Review

Inhoudsopgave

Inleiding

Een nachtmerrie

De volgende ingezonden brief trof ik aan tijdens mijn onderzoek voor dit verslag. Wat mij betreft zijn we nu wel tot een heel diep niveau gezakt.

> *"Ik ontwikkel lesmateriaal voor de hoogste klassen van het voortgezet onderwijs, over de werking en de opbouw van computers.*
>
> *Een commissie, bestaande uit vwo-docenten, heeft dit werk beoordeeld. In het beoordelingsrapport staat dat het lesboek op sommige plaatsen verduidelijking behoeft:*
>
> *'Een voorbeeld is de uitleg van de werking van de optelschakeling. De auteur veronderstelt dat leerlingen in staat zijn om handmatig twee decimale getallen bij elkaar op te tellen. Dergelijke handvaardigheid kan heden ten dage niet meer van Tweede Fase-leerlingen worden verwacht.'"*

Bron: B. Bruidegom, ingezonden brief "Optellen", IK@NRC.NL, datum onbekend

De aanleiding

Het is voor ons als volwassenen soms erg moeilijk om ons in te leven in de (leer)problemen van onze leerlingen. Naast het feit dat onze jeugd gewoon erg lang geleden is, zijn veel processen voor ons automatisch geworden.

Zeg ik "5 + 8", dan denk jij waarschijnlijk automatisch "13". Zonder ook maar enig nadenken zal dat getal bij je opkomen. Ik denk zelf dat dit komt omdat dat soort simpele berekeningen er gewoon bij ons in zitten gesleten.

Jonge leerlingen zijn wat dat betreft nog gaaf en hebben geen ingesleten automatismen. Zij zullen nog echt na moeten denken over het antwoord van een som.

Eén van de vaak toegepaste manieren om een volwassene deze beproeving opnieuw te laten beleven, is door ze te dwingen in een ander getallenstelsel te laten rekenen. In ons geval gaan we niet rekenen in het gebruikelijke base-10 (decimaal), maar in base-8: het octale stelsel

De opdracht

Alles heeft betrekking op de APS-bundel "Rekenen".

- *Uit paragraaf 3.4: Alle opdrachten, bespreek met elkaar 3.26.*
- *Werk op verschillende manieren uit (achttallig) 77x 77 = ...*

Bron: Syllabus "Analyse 1 – Vakdidactiek"

Opgave 3.26 stelt een aantal vragen over de beleving die de student heeft gehad bij het rekenen in base-8. Elke deelvraag wordt expliciet geciteerd in het desbetreffende hoofdstuk. De lezer hoeft dus niet te grijpen naar de bijbehorende literatuur.

Bijlage

Dossieropdracht 1 verlangt ook dat de student laat zien hoe hij de opgaven uit hoofdstuk 3 heeft uitgewerkt. Deze uitwerkingen zijn te vinden in de bijlage bij dit verslag. Deze bijlage voldoet niet aan de standaard lay-out van mijn verslagen, omdat zij een kopie is van mijn persoonlijke Wiki site[1].

[1] Wiki: Een vorm van website die vooral gericht is op het gemakkelijke delen en bewerken van informatie. Mijn persoonlijke Wiki, met al mijn aantekeningen en huiswerk is te vinden op http://www.kilala.nl/Wiki.

Wennen aan okt: het maken van sommen

Zoals de opdracht luidt, heb ik ook alle overige opgaven uit hoofdstuk 3 gemaakt, om zo tot antwoorden te kunnen komen voor opgave 3.26. De uitwerkingen van deze opgaven zijn te vinden op mijn persoonlijke Wiki: http://www.kilala.nl/Wiki/index.php?title=ANAL1-DID

Tijdens het werken aan de opgaven heb ik een logboek bijgehouden, waarin ik steeds mijn ervaringen bij hield.

Bij de eerste opgaven merk ik dat optellen nog best gemakkelijk gaat, maar dat het aftrekken in octaal lastig is om te doen. Om de een of andere reden blijf ik als laatste getal voor "okt" de 6 gebruiken, in plaats van de 7. Na een aantal keer oefenen is dat er gelukkig uit gesleten. Ik heb nu geen problemen meer met het terug tellen.

Bij het aftrekken houd ik helaas wel steeds in mijn hoofd dat "x0" een achttal is. Op die manier maak ik het voor mijzelf alsnog gemakkelijk om een aftreksom te maken, want "8-3" is immers logischer dan "okt – 3". Gelukkig is dit het enige overblijfsel van het decimale stelsel in mijn hoofd, bij deze opgave.

Het ezelsbruggetje van de tafel van vier is gauw ontdekt en ik maak er dankbaar gebruik van. Al in een vroeg stadium ben ik blij met de realisatie dat 4 een half okt is en dat verloop van deze tafel erg voorspelbaar is.

In het begin vind ik vermenigvuldigen erg lastig. In plaats van een echte vermenigvuldiging uit te voeren ontleed ik de som. In het ene geval breek ik de som op in behapbare stukken, in het andere maak ik er zelfs een lange optelsom van. Ik kan mij heel goed indenken dat een leerling die net begint met vermenigvuldigen ook op deze manier werkt.

Al gauw gaat het vermenigvuldigen ook al een stuk soepeler. Het is absoluut geen automatisme (zoals het bij het tientallige stelsel is), maar ik hoef ik elk geval niet de hele tijd optelsommen te doen. Opmerkelijk is wel dat ik de tafels helemaal niet gebruik. Misschien is dat omdat ik ze niet op papier bij de hand heb. Of misschien komt het omdat ik de sommen zonder handigheidjes uit mijn hoofd wil doen.

Bij vermenigvuldigingen heb ik overigens ook kort een fout gemaakt met de factoren. Waar ik blok- en okttallen moet vermenigvuldigen vergat ik nog wel eens een nulletje, of twee. Gelukkig zal ik al gauw in dat ik daar de mist mee in ging.

Opgave 3.26

1. Kennis van tafels

Bij welk soort sommen speelt de kennis van de tafels van vermenigvuldiging een grote rol?

Bron: Syllabus "Analyse 1 – Vakdidactiek"

Ik heb gemerkt dat ik tafels vooral gebruikte bij de grotere vermenigvuldigingen. Bij okttallen kon ik nog zonder, maar wanneer de blok- en bordtallen om de hoek kwamen werd het een en ander toch lastiger.

Zoals ik al eerder op merkte heb ik echter geen gebruik gemaakt van het tafel-kwadrant die we op papier hebben gemaakt. Ik weet niet precies waarom, maar ik greep toch steeds terug op de lange optelsommen in mijn hoofd. "5 x 6" was dus niet "36", maar "6, 14, 22, 30, 36".

Wat ik mij dankzij deze oefeningen heb gerealiseerd is dat ik zelf tafels gebruik om grote (decimale) vermenigvuldigingen terug te brengen naar vermenigvuldigingen met getallen <100. Ik ga er van uit dat ik niet de enige ben die dat doet.

2. Gebruik van tafels

Moet je alle tafels kennen of is een deel genoeg?

Bron: Syllabus "Analyse 1 – Vakdidactiek"

Als ik terugdenk aan hoe ik de verschillende sommen heb gemaakt, dan zijn de tafels van 3, 4, 6 en 7 het meeste voor gekomen. De overige tafels (1, 2, 5 en okt) heb ik eigenlijk helemaal niet gebruikt. Ik kan mij echter niet herinneren of dat nu was omdat die getallen minder werden gebruikt, of dat er een andere reden was.

Ik ben bang dat ik helaas nog geen "Aha Erlebnis" heb gehad met betrekking tot het gebruik van tafels. Ik weet dat ik in het dagelijkse leven eigenlijk alle tafels even veel gebruik, maar een echte verklaring heb ik daar niet voor.

3. Herkenning van hulpmiddelen

Welke modellen, visualisering en ondersteuning ben je tegengekomen?

Bron: Syllabus "Analyse 1 – Vakdidactiek"

Helaas weet ik niet precies wat er wordt bedoeld met de termen "modellen" en "ondersteuning". Bij de eerste term denk ik aan de verschillende algoritmes die worden gebruikt. Bij de tweede term denk ik aan hulpmiddelen om het een en ander begrijpelijker te maken.

Kijken we naar de algoritmes die elkaar opvolgen, dan zien we dat de leerling leert:

- Optellen
- Aftrekken
- Tafels
- Vermenigvuldigen
- Delen
- Basisregels en -mechanismen

De stap om van optellen naar aftrekken te komen wordt subtiel gemaakt. De leerling wordt niet meteen met een nieuwe soort som geconfronteerd, maar krijgt eerst een permutatie van optellen voor zijn kiezen.

Op een vergelijkbare wijze wordt ook de stap van optellen naar vermenigvuldigen gemaakt. De leerling begint met de tafels en leert dat vermenigvuldigen eigenlijk het zelfde is als heel vaak optellen.

Als laatste wordt ook de stap naar het delen gemaakt op een manier die we eerder hebben gezien. De leerling heeft geleerd hoe hij moet vermenigvuldigen en nu gaat hij aan de slag met sommen als "5 x A = 20".

Op het einde krijgt de leerling een handreiking in de vorm van basisregels en mechanismen. De leerling leert hoe hij de eerder geleerde mechanismen toe kan passen op elke combinatie van willekeurige getallen.

Manieren om het een en ander visueel te maken zijn er voldoende geweest. Op de eerste pagina's treft men illustraties die het een en ander duidelijk moeten maken.

- Men werkt met een achttallig stelsel.
- Hoe men komt tot de waardes okt, bord en blok.
- Hoe men kan komen tot samengestelde getallen.
- Dat men met 3D figuren een groot aantal getallen kan uitbeelden.

Na het schrijven van de eerste revisie van dit document volgde nog een klassengesprek met betrekking tot deze opdracht. Daaruit kwamen nog een aantal nuttige dingen naar voren.

Zo had men onder andere de volgende ondersteuningsmiddelen herkend.

- Verdubbelen. Voor het maken van vermenigvuldigingen en delingen kan het voor leerlingen nuttig zijn om gebruik te maken van verdubbelingstabellen. Deze methode komt ook terug in hoofdstuk 4 van de APS-bundel "Rekenen".
- Tellen op de vinger. Deze methode lag eigenlijk te erg voor de hand. Ik heb er zelf ook een aantal maal gebruik van gemaakt.
- De tafel-tabel. Deze tabel heb ik zelf helemaal links laten liggen, maar het schijnt dat mijn klasgenoten er veelvuldig gebruik van hebben gemaakt.

4. Herkenning van algoritmen

Welke algoritmes doorzag je en welke niet (bij optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en staartdelen)?

Bron: Syllabus "Analyse 1 – Vakdidactiek"

Zoals ik al in het vorige hoofdstuk vertelde ging het optellen eigenlijk al heel snel goed. Bij aftrekken liep ik kort tegen een probleem bij het terug tellen vanaf okttallen, naar beneden.

Vermenigvuldigen ging, net als het optellen, op zich redelijk goed. Alleen bij grotere getallen liep ik tegen lange bewerkingen op. Delen was echter een ander verhaal. Ik heb daar nog steeds een redelijk lange bewerking voor nodig.

Vermenigvuldigen begon aanvankelijk door gewoon getal A, B keer achter elkaar op te tellen. Al gauw daarna volgde het echte vermenigvuldigen. Ik neem aan dat dit zo soepel gebeurde omdat ik al bijna heel m'n leven vermenigvuldigingen bereken.

Het voorgaande doet mij concluderen dat sommen waarbij men van klein naar groot gaat (optellen, vermenigvuldigen) gemakkelijker op te pikken zijn dan andersom.

5. Voorlopige conclusies over moeilijkheden

> *Trek voorlopige conclusies over leerlingen die niet goed of snel de standaardalgoritmen kunnen hanteren of moeite hebben met decimale getallen en breuken.*

Bron: Syllabus "Analyse 1 – Vakdidactiek"

Ik moet eerlijk bekennen dat een dergelijke vraag nogal abrupt komt, voor mij als eerstejaars zonder enige onderwijservaring. Tot nu toe hebben we bij de lessen nog geen aandacht besteed aan leerproblemen en obstakels. Ik vind het daarom ook erg moeilijk om in te schatten waar een leerling problemen zou kunnen ervaren.

Om alsnog een beeld te kunnen vormen heb ik mijzelf een paar uur op recente literatuur gestort. Het blijkt dat recentelijk een grote discussie is losgebarsten over het gebruik van algoritmen, versus moderne "handige" aanpakken.

Voorstanders van de klassieke algoritmen zijn sterk voor het afwerken van rijtjes oefeningen. Dit is eigenlijk vergelijkbaar met de aanpak in hoofdstuk 3 van "Rekenen", waar dit verslag op is gebaseerd. De leerling moet per nieuw onderwerp een aantal rijen sommen maken, die gaandeweg iets moeilijker worden. De leerling krijgt vooraf een stukje theorie en men leidt de leerling op een ontdekkingstocht, waarbij de klik vanzelf hoort te volgen.

Eén van de meest populaire mythen in het wiskundeonderwijs[2] is echter dat leerlingen een hekel hebben aan het stampen van rijtjes. Daarom is er voor gekozen om bij het modernere onderwijs de leerlingen een handreiking te geven door middel van "logische werkwijzen", contexten en handigheidjes.

Het nadeel van deze manier van werken is dat de leerling constant op zoek gaat naar handigheden, in tegenstelling tot het gebruiken van een algoritme. Meerdere ervaringen uit de praktijk tonen aan dat leerlingen in de war raken door de grote hoeveelheidhandigheden die, volledig afhankelijk van de som, ingezet kunnen worden.

Voorstanders van het handige rekenen zijn echter van mening dat je juist op deze manier tot "het hart van de wiskunde" komt. Wiskunde zou immers een creatieve aanpak eisen voor elk probleem. Zij redeneren weer dat cijferen volledig geen beroep doet op de creativiteit van de leerling en dat het daarom de wiskunde verloochent.

[2] J. vd Craats, "Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen", 2007

Zelf denk ik dat we de gulden middenweg moeten zoeken. Introduceer een nieuw onderwerp aan de hand van contexten, zodat de leerlingen zich beter betrokken voelen bij de stof (betekenis geven aan de stof). Na deze introductie met een eerste aantal sommen kan de leerling aan de slag met de achterliggende theorie. Deze zou wat mij betreft het beste geoefend kunnen worden met rijen sommen.

Ik denk dat ik voorlopig de problemen met dit soort sommen zou zoeken in de manier van werken van de leerling.

- Werkt hij met een eenduidig algoritme, of met één van de modernere varianten?
- Heeft de leerling door wat hij met deze rekenwijze moet doen? Snapt hij wat de verschillende stappen zijn?
- Bij welke van de deelstappen gaat de leerling de mist in?
- Wat voor fout maakt de leerling? Past hij een algoritme niet goed toe? Maakt hij slordigheidfouten?
- Kan de leerling de uitwerking überhaupt met pen en papier, of is hij al zo gewend geraakt aan de rekenmachine?

Verschillende aanpakken voor vermenigvuldiging

Ik heb mij eens verdiept in lopende discussies over standaardalgoritmen, versus het zogenaamde "handige rekenen". Het schijnt dat de kampen nogal verdeeld zijn tussen het ouderwetse cijferen en het modernere contextrijke rekenen.

Cijferen is het domein van de in de opdracht genoemde standaardalgoritmen en is een kwestie van oefenen, oefenen en nog eens oefenen. De sommen hebben betrekking op kale getallen. Het is rekenen om het rekenen

Bij het contextrijke rekenen is het rekenen echter ondergeschikt aan de context. Het rekenen is bedoeld om een probleem, zo mogelijk gebaseerd op de werkelijkheid, op te lossen. Dat er standaard mechanismen zijn voor de berekeningen is goed om te weten, maar de leerling moet ook het gebruik van slimmigheden niet schuwen.

Laten we als voorbeeld de (octale) vermenigvuldiging "77 x 77" nemen.

In het geval van cijferen zal men beide getallen onder elkaar zetten en de verschillende elementen van de getallen onderling vermenigvuldigen. Na een optelsom komt men tot het uiteindelijke antwoord.

Tegenwoordig gebruikt men op het basisonderwijs veel de kolomsgewijze aanpak. In dit geval voert de leerling eerst de verschillende vermenigvuldigingen uit (van links naar rechts), gevolgd door een optelsom. Deze optelsom telt eerst de duizendtallen, daarna de honderdtallen, gevolgd dor tientallen en eenheden.

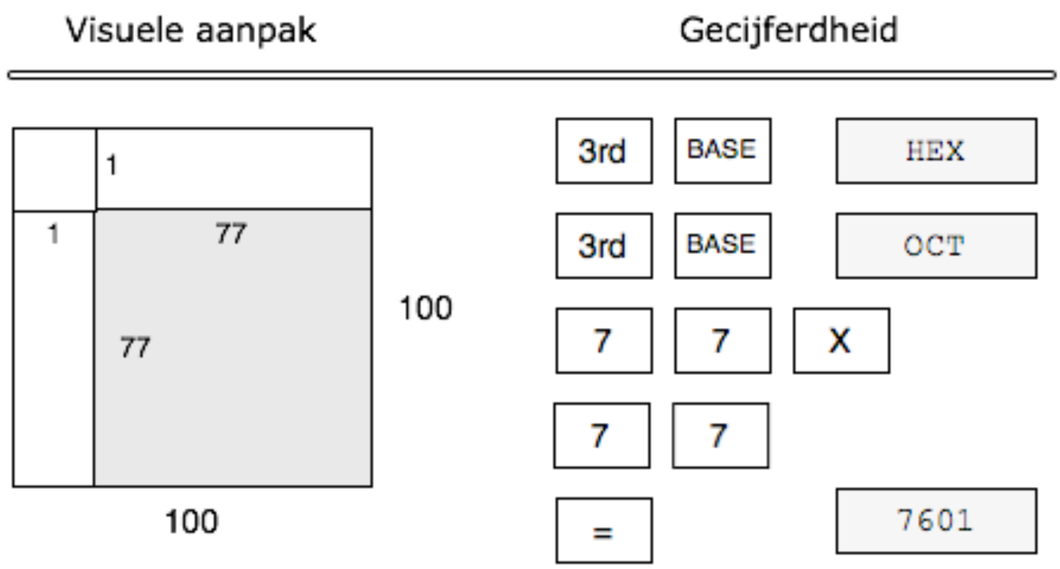
Aan de andere kant kan men de som ook op een erg slimme manier aanpakken. Men vermenigvuldigt 77 met 100 en trekt daarna 77 af van het antwoord.

Cijferen	Kolomsgewijs	Handige aanpak
77	77	77 x 77 = (77 x 100) - 77
77 x	77 x	= 7700 - 77
61	6100	= 7601
610	610	
610	610	
6100 +	61 +	
7601	6000	
	1500	
	100	
	1 +	
	7601	

Figuur 1: Cijferen, de kolomsgewijze en de handige aanpak

De laatstgenoemde "handige" aanpak kan ook visueel worden gemaakt, door de leerlingen het een en ander uit te laten tekenen. Laat ze een vierkant tekenen met elk een zijde van 100. Laat ze binnen dit vierkant ook een vierkant tekenen met zijdes van 77. Leerlingen die al les hebben gehad in oppervlaktes zullen nu heel gauw zien dat "77 x 77 = (77 x 100) – 77".

Overigens is er recentelijk nog een derde stroming in zwang geraakt, de zogenaamde "gecijferdheid" [3]. Deze stroming heeft zich als doel gesteld om de leerling zo goed mogelijk voor te bereiden op wiskunde, in combinatie met moderne hulpmiddelen. ICT en contexten worden veelvuldig gebruikt.



Figuur 2: De visuele aanpak en gecijferdheid

Kritiek op de kolomsgewijze aanpak

Voor mensen van de oude stempel gaat de kolomsgewijze methode volledig tegen de intuïtie in. Een groot aantal wiskundedocenten (ogenschijnlijk onder leiding van Jan van de Craats) doet daarom zijn uiterste best om de methode weer uit het onderwijs weg te krijgen.

De belangrijkste reden achter hun protest is dat deze aanpak misschien handig lijkt, maar dat zij volledig uit elkaar valt wanneer je haar op grote getallen toe gaat passen. Ook aftrekken en delen zijn niet zonder hun problemen.

Bijvoorbeeld, bij het aftrekken wordt er van de basisschoolleerlingen al verwacht dat ze gaan werken met pseudo-negatieve getallen. Deze getallen worden voor het "gemak" aangeduid met het woord "tekort" in de resulterende optelsom.

[3] Zie K. Hoogland "Reken is meer dan sommen maken".

Afbeeldingen en figuren

Bronnen

Hogeschool Utrecht, "Analyse jaar 1, Rekenen is complex, Vakdidactisch.." Vakgroep wiskunde, 2007

J.A. van Maanen, "De koeiennon. Hoe rekenen en wiskunde te leren, en van wie?", 2007

Beter Onderwijs Nederland, "Dossier Kees Hoogland", 2007 http://www.beteronderwijsnederland.nl/?q=node/2382

K. Hoogland, "Rekenen is meer dan sommen maken", VO #7, juli 2007

J. vd Craats, "Waarom Daan en Sanne niet kunnen rekenen", NAW #2, juni 2007

Freudenthal Instituut, "Doorlopende leerlijnen rekenen-wiskunde", 2007 http://www.fi.uu.nl/dll/intro.html